

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b> .....	v
<b>1 Vektorrechnung</b> .....	1
1.1 Grundlagen der Vektorrechnung .....	1
1.1.1 Richtung und Betrag .....	1
1.1.2 Normierung .....	3
1.1.3 Einfache Rechenoperationen .....	4
1.1.4 Masse und Schwerpunkt .....	7
1.1.5 Kanonische Basisdarstellung .....	8
1.1.6 Geometrie mit Vektoren .....	8
1.1.7 Statik .....	11
1.2 Skalarprodukt .....	14
1.2.1 Skalarprodukt und Projektion .....	15
1.2.2 Folgerungen aus dem Skalarprodukt .....	16
1.2.3 Skalarprodukt in Komponenten .....	18
1.2.4 Weitere Rechenregeln .....	19
1.2.5 Parallel-Senkrecht-Zerlegung .....	20
1.2.6 Skalarprodukte in der Physik .....	22
1.3 Vektorprodukt .....	23
1.3.1 Definition des Kreuzprodukts .....	23
1.3.2 Folgerungen und Rechenregeln .....	24
1.3.3 Kreuzprodukt in Komponenten .....	25
1.3.4 Doppelte Produkte .....	27
1.3.5 Lorentz-Kraft .....	30
1.4 Vektorgleichungen .....	32
1.4.1 Gerade .....	32
1.4.2 Ebenengleichung .....	33
1.4.3 Kreis- und Kugelgleichung .....	35
1.5 Koordinatensysteme .....	37
1.5.1 Orientierung .....	37
1.5.2 Orthonormalbasis .....	38
1.5.3 Koordinatensysteme .....	39
<b>2 Lineare Algebra</b> .....	45
2.1 Matrizenrechnung .....	45
2.1.1 Matrixbegriff .....	45
2.1.2 Grundlegende Rechengesetze .....	46
2.1.3 Die Determinante .....	51
2.1.4 Inverse einer Matrix .....	55
2.1.5 Weitere Matrixoperationen .....	56
2.2 Lineare Gleichungssysteme .....	61
2.2.1 Was ist ein lineares Gleichungssystem? .....	61

2.2.2	Gauß-Algorithmus . . . . .	62
2.2.3	Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme . . . . .	64
2.2.4	Matrizengleichungen . . . . .	66
2.3	Abbildungen . . . . .	68
2.3.1	Abbildungsmatrix . . . . .	68
2.3.2	Spiegelungen . . . . .	70
2.3.3	Drehungen . . . . .	71
2.3.4	Allgemeine Drehmatrix . . . . .	75
2.3.5	Basiswechsel = Drehung des Koordinatensystems . . . . .	77
2.4	Diagonalisierung und Hauptachsentransformation . . . . .	79
2.4.1	Eigenwertproblem . . . . .	79
2.4.2	Diagonalisierung . . . . .	80
2.4.3	Quadriken . . . . .	83
2.4.4	Hauptachsentransformation . . . . .	85
3	<b>Rechnen mit Indizes</b> . . . . .	91
3.1	Einstein'sche Summenkonvention . . . . .	91
3.2	Skalarprodukt und das Kronecker-Symbol . . . . .	93
3.2.1	Skalarprodukt in Indizes . . . . .	93
3.2.2	Definition des Kronecker-Symbols . . . . .	94
3.2.3	Rechenregeln für das Kronecker-Symbol . . . . .	94
3.2.4	Interpretation des Kronecker-Symbols $\delta_{ij}$ . . . . .	96
3.3	Der Levi-Civita-Tensor . . . . .	97
3.3.1	Zyklische und antizyklische Permutationen . . . . .	97
3.3.2	Das Levi-Civita-Symbol . . . . .	98
3.3.3	Spatprodukt und Kreuzprodukt in Kurzform . . . . .	99
3.4	Produkte mit Kronecker und Levi-Civita . . . . .	101
3.5	„Anwendungen“ . . . . .	103
3.5.1	Beweis der bac-cab-Formel . . . . .	103
3.5.2	Matrizenrechnung in Kurzform . . . . .	104
3.5.3	Tensoren . . . . .	106
4	<b>Differenzialrechnung</b> . . . . .	109
4.1	Ableitungen . . . . .	109
4.1.1	Begriff der Ableitung . . . . .	109
4.1.2	Ableitungsregeln . . . . .	113
4.1.3	Kurvendiskussion light . . . . .	118
4.2	Mehrdimensionale Ableitungen . . . . .	124
4.2.1	Skalare Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . . .	124
4.2.2	Partielle Ableitung und Gradient . . . . .	127
4.2.3	Lokale Extrema . . . . .	131
4.3	Reihenentwicklung . . . . .	136
4.3.1	Taylor-Entwicklung in 1-D . . . . .	136
4.3.2	Hilfreiche Reihen . . . . .	137

4.3.3	e hoch Matrix . . . . .	139
4.3.4	Allgemeine Taylor-Entwicklung . . . . .	141
4.4	Ableitung vektorwertiger Funktionen . . . . .	143
4.4.1	Jacobi-Matrix und Funktionaldeterminante . . . . .	144
4.4.2	Kettenregel . . . . .	145
4.4.3	Totales Differenzial . . . . .	149
5	<b>Integration</b> . . . . .	153
5.1	Grundlegende Integralrechnung . . . . .	153
5.1.1	Integralbegriff . . . . .	153
5.1.2	Der Hauptsatz . . . . .	154
5.1.3	Einfache Integrationsregeln und -tricks . . . . .	157
5.2	Integrationsmethoden . . . . .	160
5.2.1	Partielle Integration . . . . .	160
5.2.2	Integration durch Substitution . . . . .	161
5.2.3	Ableiten nach Parametern . . . . .	165
5.2.4	Partialbruchzerlegung . . . . .	166
5.3	Mehrfachintegration . . . . .	168
5.3.1	Flächenintegrale . . . . .	169
5.3.2	Volumenintegrale . . . . .	171
5.3.3	Integraltransformationssatz . . . . .	173
5.3.4	Masse und Schwerpunkt . . . . .	177
5.4	Distributionen . . . . .	181
5.4.1	Delta-Distribution . . . . .	181
5.4.2	Der große Bruder: $\Theta(x)$ . . . . .	186
6	<b>Bahnkurven</b> . . . . .	189
6.1	Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung . . . . .	189
6.2	Bewegungen . . . . .	192
6.2.1	Geradlinig gleichförmige Bewegung . . . . .	192
6.2.2	Geradlinig gleichmäßig beschleunigte Bewegung . . . . .	193
6.2.3	Kreisbewegung . . . . .	194
6.2.4	Zusammengesetzte Bewegungen . . . . .	196
6.3	Bogenlänge . . . . .	198
6.4	Geschwindigkeit in krummlinigen Koordinaten . . . . .	200
7	<b>Gewöhnliche Differenzialgleichungen</b> . . . . .	203
7.1	Grundlagen . . . . .	203
7.1.1	Was ist eine Differenzialgleichung (DGL)? . . . . .	203
7.1.2	Klassifikation und Terminologie . . . . .	204
7.1.3	Eine wichtige DGL: Newton . . . . .	205
7.2	Lösungsansätze . . . . .	205
7.3	Gekoppelte Differenzialgleichungen . . . . .	215
8	<b>Komplexe Zahlen</b> . . . . .	219

8.1	Grundlagen .....	219
8.1.1	i-Gitt i-Gitt .....	219
8.1.2	Rechenregeln .....	220
8.1.3	Komplexe Zahlen in Polarkoordinaten .....	222
8.2	Trigonometrie mit komplexen Zahlen .....	223
8.2.1	Euler-Formel .....	223
8.2.2	Sinus und Kosinus .....	225
8.3	Anwendungen .....	226
8.3.1	Komplexe Exponentialreihe .....	226
8.3.2	Harmonischer Oszillator .....	227
9	<b>Vektoranalysis .....</b>	229
9.1	Was ist ein Feld? .....	229
9.2	Operatoren der Vektoranalysis .....	230
9.2.1	Gradient, Divergenz und Rotation .....	230
9.2.2	Laplace .....	233
9.2.3	Noch mehr $\nabla$ .....	233
9.2.4	Ableiten in Indexschreibweise .....	235
9.3	Krummlinige Koordinaten .....	238
9.3.1	Bestimmung der Basisvektoren in neuen Koordinaten .....	238
9.3.2	Tangentialvektoren und Oberflächenintegrale .....	239
9.3.3	$\nabla$ in krummlinigen Koordinaten .....	241
9.4	Integralsätze .....	245
9.4.1	Satz von Gauß .....	245
9.4.2	Satz von Stokes, Kurvenintegral .....	248
10	<b>Fourier-Analysis .....</b>	251
10.1	Die Idee .....	251
10.2	Fourier-Reihe .....	252
10.2.1	Fourier-Zerlegung .....	252
10.2.2	Eigenschaften der Fourier-Reihe .....	252
10.2.3	Parsevals Theorem .....	255
10.3	Fourier-Transformation .....	255
10.3.1	Definition und Eigenschaften .....	256
10.3.2	Spezielle Fourien .....	257
10.3.3	Fourier-Trafo der Zeit .....	258
10.3.4	3-D- und 4-D-Fourier-Transformation .....	259
10.3.5	DGL-Lösung per Fourier .....	260
11	<b>Partielle Differenzialgleichungen .....</b>	263
11.1	Was ist eine partielle Differenzialgleichung? .....	263
11.2	Laplace-Gleichung und Poisson-Gleichung .....	265
11.2.1	Laplace-Gleichung .....	265
11.2.2	Kugelsymmetrische Lösung .....	266
11.2.3	Poisson-Gleichung .....	266

11.3	Kontinuitätsgleichung . . . . .	268
11.4	Diffusionsgleichung . . . . .	269
11.4.1	Diffusion und Wärmeausbreitung . . . . .	269
11.4.2	Formale Lösung der Diffusionsgleichung . . . . .	269
11.4.3	Diffusion im kugelsymmetrischen Fall . . . . .	271
11.4.4	Allgemeine Lösung . . . . .	272
11.5	Wellen . . . . .	274
11.5.1	Die Wellengleichung . . . . .	274
11.5.2	1-D-Wellengleichung . . . . .	275
11.5.3	Kugelsymmetrische Lösung . . . . .	278
11.5.4	Ebene Wellen sind einfachste Lösung der 3-D-Wellengleichung	279
12	<b>Einfache Anwendungen in der Mechanik</b> . . . . .	283
12.1	Grundbegriffe . . . . .	283
12.2	Newton . . . . .	284
12.2.1	Newton'sche Axiome . . . . .	284
12.2.2	Newton'sche Bewegungsgleichung . . . . .	285
12.2.3	Wichtige mechanische Kräfte . . . . .	286
12.2.4	Konservative Kräfte, Zentralkräfte . . . . .	289
12.3	Energie, Impuls und Arbeit . . . . .	293
12.3.1	Energiesatz und Potenzial . . . . .	293
12.3.2	Impuls . . . . .	297
12.3.3	Arbeit . . . . .	300
12.3.4	Formale Lösung des 1-D-Energiesatzes . . . . .	304
12.4	Rotationen . . . . .	306
12.4.1	Drehimpuls und Drehmoment . . . . .	306
12.4.2	Drehimpulserhaltung . . . . .	308
12.4.3	Inertialsystem und Scheinkräfte . . . . .	309
12.5	Teilchen im Potenzial . . . . .	312
12.5.1	Bewegungen im Potenzial . . . . .	312
12.5.2	Symmetrien und Erhaltungsgrößen . . . . .	313
12.5.3	Effektives Potenzial . . . . .	315
12.6	Schwingungen . . . . .	317
12.6.1	Mathematisches Pendel . . . . .	317
12.6.2	Der harmonische Oszillator . . . . .	319
12.6.3	Exakte Schwingungsperiode in einem Potenzial . . . . .	322
12.6.4	Kleine Schwingungen im Potenzial . . . . .	323
12.6.5	Gekoppelte Schwingungen . . . . .	325
12.6.6	Schwingungen im mehrdimensionalen Potenzial . . . . .	329
12.7	Rotation eines Körpers . . . . .	332
12.7.1	Grundbegriffe . . . . .	332
12.7.2	Trägheitstensor und -moment . . . . .	333
12.7.3	Stabile Rotation . . . . .	335

<b>13</b>	<b>Einfache Anwendungen in der Elektrodynamik</b>	339
13.1	Bewegung eines geladenen Teilchens	339
13.1.1	Ladung	339
13.1.2	Strom	340
13.1.3	Kontinuitätsgleichung	342
13.1.4	Ladung in $\vec{E}$ - und $\vec{B}$ -Feldern	343
13.2	Maxwell-Gleichungen	345
13.2.1	Interpretation der Maxwell-Gleichungen	345
13.2.2	Andere Maßsysteme	347
13.2.3	Integrale Maxwell-Gleichungen	348
13.2.4	Kontinuitätsgleichung	349
13.3	Elektrostatik	350
13.3.1	Gleichungen der Elektrostatik	350
13.3.2	Lösung durch Ansatz	351
13.3.3	Lösung per Skalarpotenzial	352
13.4	Magnetostatik	355
13.4.1	Gleichungen der Magnetostatik	355
13.4.2	Lösung durch Ansatz	355
13.4.3	Lösung per Vektorpotenzial, Satz von Biot-Savart	357
13.5	Elektromagnetische Wellen	359
13.5.1	Homogene Wellengleichungen	359
13.5.2	Ebene elektromagnetische Wellen	362
13.5.3	Lösung der allgemeinen Maxwell-Gleichungen	364
<b>A</b>	<b>Klausur „spielen“</b>	368
	<b>Literaturverzeichnis</b>	373
	<b>Index</b>	375