

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1	Die Mathematik und ihre Sprache	2
1.2	Junktoren	4
1.3	Quantoren	6
1.4	Beweise	7
1.5	Menge und Element	9
1.6	Mengenoperationen	12
1.7	Relationen	14
1.8	Funktionen	16
1.9	Äquivalenzrelationen	19
1.10	Partielle und lineare Ordnungen	21
1.11	Existenz und algorithmische Berechenbarkeit	23
1.12	Strukturen und strukturerhaltende Abbildungen	25
<b>2</b>	<b>Zahlen</b>	<b>29</b>
2.1	Natürliche Zahlen	30
2.2	Ganze und rationale Zahlen	32
2.3	Reelle Zahlen	34
2.4	Komplexe Zahlen	37
2.5	Quaternionen	39
2.6	$b$ -adische Darstellungen	41
2.7	Irrationale Zahlen	43
2.8	Algebraische und transzendente Zahlen	45
2.9	Die Zahlen $\pi$ und $e$	47
2.10	Infinitesimale Größen	49
2.11	$p$ -adische Zahlen	51
2.12	Zufallszahlen	53
<b>3</b>	<b>Zahlentheorie</b>	<b>55</b>
3.1	Teilbarkeit	56
3.2	Primzahlen und der Fundamentalsatz der Arithmetik	57
3.3	Kongruenzen	59
3.4	Einfache Primzahltests	61
3.5	Das RSA-Verfahren	64
3.6	Die Verteilung der Primzahlen	66
3.7	Quadratische Reste	69
3.8	Kettenbrüche	72
3.9	Rationale Approximationen algebraischer Zahlen; Liouillesche Zahlen	74
3.10	Diophantische Gleichungen	77
3.11	Elliptische Kurven	79
3.12	Zahlkörper	80

<b>4 Diskrete Mathematik</b> .....	85
4.1 Kombinatorisches Zählen .....	86
4.2 Graphen .....	88
4.3 Euler-Züge .....	90
4.4 Hamilton-Kreise und das $P \neq NP$ -Problem .....	92
4.5 Bäume .....	94
4.6 Färbungen und der Satz von Ramsey .....	95
4.7 Bipartite Graphen .....	97
4.8 Matroide .....	100
4.9 Netzwerke und Flüsse .....	102
4.10 Kürzeste Wege .....	104
4.11 Transitivierung von Relationen .....	106
4.12 Planare Graphen und Minoren .....	107
<b>5 Lineare Algebra</b> .....	111
5.1 Vektorräume .....	112
5.2 Lineare Unabhängigkeit und Dimension .....	114
5.3 Lineare Abbildungen und Matrizen .....	116
5.4 Lineare Gleichungssysteme .....	119
5.5 Determinanten .....	121
5.6 Euklidische und unitäre Vektorräume .....	123
5.7 Normierte Vektorräume .....	125
5.8 Orthogonalität .....	127
5.9 Dualität .....	129
5.10 Eigenwerte und Eigenvektoren .....	131
5.11 Diagonalisierung .....	133
5.12 Singulärwertzerlegung und Jordansche Normalform .....	135
<b>6 Algebra</b> .....	137
6.1 Gruppen .....	138
6.2 Ringe .....	142
6.3 Körper .....	143
6.4 Normalteiler und Faktorgruppen .....	144
6.5 Ideale und Teilbarkeit in Ringen .....	147
6.6 Endlich erzeugte abelsche Gruppen .....	149
6.7 Quotientenkörper .....	152
6.8 Polynome .....	153
6.9 Körpererweiterungen .....	156
6.10 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal .....	157
6.11 Galoistheorie .....	158
6.12 Lösbarkeit polynomialer Gleichungen durch Radikale .....	162
<b>7 Elementare Analysis</b> .....	165
7.1 Folgen und Grenzwerte .....	166
7.2 Unendliche Reihen und Produkte .....	168

7.3	Stetige Funktionen . . . . .	170
7.4	Exponentialfunktion, Logarithmus und trigonometrische Funktionen	172
7.5	Differenzierbare Funktionen . . . . .	174
7.6	Das Riemannsche Integral . . . . .	176
7.7	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . .	178
7.8	Vertauschung von Grenzprozessen . . . . .	180
7.9	Taylorentwicklung und Potenzreihen . . . . .	182
7.10	Fourierreihen . . . . .	185
7.11	Fouriertransformation . . . . .	187
7.12	Kurven im $\mathbb{R}^d$ . . . . .	189
<b>8</b>	<b>Höhere Analysis . . . . .</b>	<b>191</b>
8.1	Metrische und normierte Räume . . . . .	192
8.2	Partielle und totale Differenzierbarkeit . . . . .	195
8.3	Mittelwertsatz, Taylorformel und lokale Extrema . . . . .	197
8.4	Der Satz von Picard-Lindelöf . . . . .	198
8.5	Stabilität von Gleichgewichtspunkten . . . . .	200
8.6	Das Lebesguesche Maß . . . . .	202
8.7	Das Lebesguesche Integral . . . . .	204
8.8	Der Gaußsche Integralsatz . . . . .	207
8.9	Holomorphe Funktionen . . . . .	209
8.10	Der Residuensatz . . . . .	211
8.11	Fixpunktsätze . . . . .	213
8.12	Der Bairesche Kategorienatz . . . . .	215
<b>9</b>	<b>Topologie und Geometrie . . . . .</b>	<b>217</b>
9.1	Topologische Räume . . . . .	218
9.2	Stetige Abbildungen . . . . .	221
9.3	Beschreibung von Topologien . . . . .	222
9.4	Produkträume und Quotientenräume . . . . .	224
9.5	Zusammenhang . . . . .	227
9.6	Trennung . . . . .	229
9.7	Kompaktheit . . . . .	231
9.8	Flächen im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	233
9.9	Mannigfaltigkeiten . . . . .	238
9.10	Homotopie . . . . .	241
9.11	Homologie . . . . .	243
9.12	Euklidische und nichteuklidische Geometrie . . . . .	245
<b>10</b>	<b>Numerik . . . . .</b>	<b>249</b>
10.1	Die Kondition . . . . .	250
10.2	Gleitkomma-Arithmetik . . . . .	252
10.3	Numerische Stabilität . . . . .	254
10.4	Das Gaußsche Eliminationsverfahren . . . . .	257
10.5	Die Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	260

10.6	Eigenwertprobleme .....	262
10.7	Polynominterpolation .....	264
10.8	Die schnelle Fouriertransformation .....	266
10.9	Numerische Integration und Summation .....	268
10.10	Die Gaußschen Quadraturverfahren .....	270
10.11	Runge-Kutta-Verfahren .....	272
10.12	Das Newton-Verfahren .....	274
<b>11</b>	<b>Stochastik .....</b>	<b>277</b>
11.1	Wahrscheinlichkeitsräume .....	278
11.2	Zufallsvariable .....	280
11.3	Erwartungswert und Varianz .....	283
11.4	Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit .....	285
11.5	Null-Eins-Gesetze .....	288
11.6	Das Gesetz der großen Zahl .....	288
11.7	Der zentrale Grenzwertsatz .....	290
11.8	Parameterschätzung .....	293
11.9	Statistische Tests .....	295
11.10	Markovsche Ketten .....	297
11.11	Irrfahrten .....	300
11.12	Die Brownsche Bewegung .....	301
<b>12</b>	<b>Mengenlehre und Logik .....</b>	<b>303</b>
12.1	Mächtigkeiten .....	304
12.2	Das Diagonalverfahren .....	306
12.3	Die Russell-Antinomie .....	308
12.4	Die Zermelo-Fraenkel-Axiomatik .....	310
12.5	Das Auswahlaxiom .....	312
12.6	Das Zornsche Lemma .....	314
12.7	Paradoxa der Maßtheorie .....	315
12.8	Berechenbare Funktionen .....	317
12.9	Formale Beweise und Modelle .....	320
12.10	Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze .....	323
12.11	Transfinite Zahlen .....	325
12.12	Die Kontinuumshypothese .....	327
<b>Index .....</b>	<b>329</b>	