

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	1
1.1 Die Mathematik und ihre Sprache	2
1.2 Junktoren	4
1.3 Quantoren	6
1.4 Beweise	7
1.5 Menge und Element	9
1.6 Mengenoperationen	12
1.7 Relationen	14
1.8 Funktionen	16
1.9 Äquivalenzrelationen	19
1.10 Partielle und lineare Ordnungen	21
1.11 Existenz und algorithmische Berechenbarkeit	23
1.12 Strukturen und strukturerhaltende Abbildungen	25
2 Zahlen	29
2.1 Natürliche Zahlen	30
2.2 Ganze und rationale Zahlen	32
2.3 Reelle Zahlen	34
2.4 Komplexe Zahlen	37
2.5 Quaternionen	39
2.6 b -adische Darstellungen	41
2.7 Irrationale Zahlen	43
2.8 Algebraische und transzendente Zahlen	45
2.9 Die Zahlen π und e	47
2.10 Infinitesimale Größen	49
2.11 p -adische Zahlen	51
2.12 Zufallszahlen	53
3 Zahlentheorie	55
3.1 Teilbarkeit	56
3.2 Primzahlen und der Fundamentalsatz der Arithmetik	57
3.3 Kongruenzen	59
3.4 Einfache Primzahltests	61
3.5 Das RSA-Verfahren	64
3.6 Die Verteilung der Primzahlen	66
3.7 Quadratische Reste	69
3.8 Kettenbrüche	72
3.9 Rationale Approximationen algebraischer Zahlen; Liouvillesche Zahlen	74
3.10 Diophantische Gleichungen	77
3.11 Elliptische Kurven	79
3.12 Zahlkörper	80

4 Diskrete Mathematik	85
4.1 Kombinatorisches Zählen	86
4.2 Graphen	88
4.3 Euler-Züge	90
4.4 Hamilton-Kreise und das $P \neq NP$ -Problem	92
4.5 Bäume	94
4.6 Färbungen und der Satz von Ramsey	95
4.7 Bipartite Graphen	97
4.8 Matroide	100
4.9 Netzwerke und Flüsse	102
4.10 Kürzeste Wege	104
4.11 Transitivierung von Relationen	106
4.12 Planare Graphen und Minoren	107
5 Lineare Algebra	111
5.1 Vektorräume	112
5.2 Lineare Unabhängigkeit und Dimension	114
5.3 Lineare Abbildungen und Matrizen	116
5.4 Lineare Gleichungssysteme	119
5.5 Determinanten	121
5.6 Euklidische und unitäre Vektorräume	123
5.7 Normierte Vektorräume	125
5.8 Orthogonalität	127
5.9 Dualität	129
5.10 Eigenwerte und Eigenvektoren	131
5.11 Diagonalisierung	133
5.12 Singulärwertzerlegung und Jordansche Normalform	135
6 Algebra	137
6.1 Gruppen	138
6.2 Ringe	142
6.3 Körper	143
6.4 Normalteiler und Faktorgruppen	144
6.5 Ideale und Teilbarkeit in Ringen	147
6.6 Endlich erzeugte abelsche Gruppen	149
6.7 Quotientenkörper	152
6.8 Polynome	153
6.9 Körpererweiterungen	156
6.10 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal	157
6.11 Galoistheorie	158
6.12 Lösbarkeit polynomialer Gleichungen durch Radikale	162
7 Elementare Analysis	165
7.1 Folgen und Grenzwerte	166
7.2 Unendliche Reihen und Produkte	168

7.3	Stetige Funktionen	170
7.4	Exponentialfunktion, Logarithmus und trigonometrische Funktionen	172
7.5	Differenzierbare Funktionen	174
7.6	Das Riemannsche Integral	176
7.7	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	178
7.8	Vertauschung von Grenzprozessen	180
7.9	Taylorentwicklung und Potenzreihen	182
7.10	Fourierreihen	185
7.11	Fouriertransformation	187
7.12	Kurven im \mathbb{R}^d	189
8	Höhere Analysis	191
8.1	Metrische und normierte Räume	192
8.2	Partielle und totale Differenzierbarkeit	195
8.3	Mittelwertsatz, Taylorformel und lokale Extrema	197
8.4	Der Satz von Picard-Lindelöf	198
8.5	Stabilität von Gleichgewichtspunkten	200
8.6	Das Lebesguesche Maß	202
8.7	Das Lebesguesche Integral	204
8.8	Der Gaußsche Integralsatz	207
8.9	Holomorphe Funktionen	209
8.10	Der Residuensatz	211
8.11	Fixpunktsätze	213
8.12	Der Bairesche Kategoriensatz	215
9	Topologie und Geometrie	217
9.1	Topologische Räume	218
9.2	Stetige Abbildungen	221
9.3	Beschreibung von Topologien	222
9.4	Produkträume und Quotientenräume	224
9.5	Zusammenhang	227
9.6	Trennung	229
9.7	Kompaktheit	231
9.8	Flächen im \mathbb{R}^3	233
9.9	Mannigfaltigkeiten	238
9.10	Homotopie	241
9.11	Homologie	243
9.12	Euklidische und nichteuklidische Geometrie	245
10	Numerik	249
10.1	Die Kondition	250
10.2	Gleitkomma-Arithmetik	252
10.3	Numerische Stabilität	254
10.4	Das Gaußsche Eliminationsverfahren	257
10.5	Die Methode der kleinsten Quadrate	260

10.6	Eigenwertprobleme	262
10.7	Polynominterpolation	264
10.8	Die schnelle Fouriertransformation	266
10.9	Numerische Integration und Summation	268
10.10	Die Gaußschen Quadraturverfahren	270
10.11	Runge-Kutta-Verfahren.....	272
10.12	Das Newton-Verfahren	274
11	Stochastik.....	277
11.1	Wahrscheinlichkeitsräume.....	278
11.2	Zufallsvariable	280
11.3	Erwartungswert und Varianz	283
11.4	Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit	285
11.5	Null-Eins-Gesetze.....	288
11.6	Das Gesetz der großen Zahl	288
11.7	Der zentrale Grenzwertsatz	290
11.8	Parameterschätzung	293
11.9	Statistische Tests	295
11.10	Markovsche Ketten	297
11.11	Irrfahrten.....	300
11.12	Die Brownsche Bewegung.....	301
12	Mengenlehre und Logik	303
12.1	Mächtigkeiten	304
12.2	Das Diagonalverfahren	306
12.3	Die Russell-Antinomie.....	308
12.4	Die Zermelo-Fraenkel-Axiomatik	310
12.5	Das Auswahlaxiom	312
12.6	Das Zornsche Lemma	314
12.7	Paradoxa der Maßtheorie	315
12.8	Berechenbare Funktionen	317
12.9	Formale Beweise und Modelle	320
12.10	Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze.....	323
12.11	Transfinite Zahlen	325
12.12	Die Kontinuumshypothese	327
Index		329