

Inhalt

Kapitel I Grundlagen

§ 1 Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen	
1 Vorläufiges über Mengen und Aussagen	13
2 Vorläufiges über die reellen Zahlen	15
3 Rechengesetze für reelle Zahlen	16
4 Das Rechnen in \mathbb{Q} , \mathbb{Z} und \mathbb{N}	16
5 Die Anordnung der reellen Zahlen	17
6 Vollständige Induktion	21
7 Intervalle	25
8 Beschränkte Mengen, obere und untere Schranke	26
9 Maximum und Minimum	27
10 Archimedische Anordnung von \mathbb{Q}	28
11 Die Abzählbarkeit von \mathbb{Q}	28
12 Zur Lückenhaftigkeit von \mathbb{Q}	29
§ 2 Die Vollständigkeit von \mathbb{R}, konvergente Folgen	
1 Supremum und Infimum	30
2 Folgerungen aus dem Supremumsaxiom	31
3 Folgen, Rekursion, Teifolgen	34
4 Nullfolgen	35
5 Sätze über Nullfolgen	39
6 Grenzwerte von Folgen	40
7 Existenz der m -ten Wurzel, rationale Potenzen	44
8 Intervallschachtelungen	45
9 Grenzwertfreie Konvergenzkriterien	48
§ 3 Elementare Funktionen	
1 Die Folge $((1 + \frac{x}{n})^n)$	52
2 Die Exponentialfunktion	54
3 Funktionen, Abbildungen	57
4 Die Logarithmusfunktion	60
5 Die allgemeine Potenz und der Zehnerlogarithmus	61
6 Zusammengesetzte Funktionen	62
7 Polynome und rationale Funktionen	63
8 Die trigonometrischen Funktionen	69
§ 4 Mengen und Wahrscheinlichkeit	
1 Einfache Mengenalgebra	76
2 Exkurs über logisches Schließen und Beweistechnik	78
3 Notwendige und hinreichende Bedingungen	80
4 Beliebige Vereinigungen und Durchschnitte	80

5 Beispiele zur Wahrscheinlichkeit	81
6 Das mathematische Modell endlicher Zufallsexperimente	83
7 Das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten	86
8 Kombinatorische Grundformeln (Teil I)	88
9 Binomialkoeffizienten und Binomialverteilung	93
10 Kombinatorische Grundformeln (Teil II)	98

Kapitel II Vektorrechnung im \mathbb{R}^n

§ 5 Vektorrechnung im \mathbb{R}^2 , komplexe Zahlen

1 Vektorielle Größen in der Physik	100
2 Vektoren in der ebenen Geometrie	100
3 Koordinatendarstellung von Punkten und Vektoren	104
4 Punkte und Vektoren	107
5 Geraden und Strecken, Schnitt zweier Geraden	108
6 Lineare 2×2 -Gleichungssysteme	110
7 Abstand, Norm, Winkel, ebene Drehungen	111
8 Komplexe Zahlen	114
9 Die komplexe Exponentialfunktion	120
10 Der Fundamentalsatz der Algebra, Beispiele	121
11 Drehungen und Spiegelungen in komplexer Schreibweise	124

§ 6 Vektorrechnung im \mathbb{R}^n

1 Der Vektorraum \mathbb{R}^n	126
2 Skalarprodukt, Längen, Winkel	128
3 Das Vektorprodukt im \mathbb{R}^3	132
4 Entwicklung nach Orthonormalsystemen, Orthonormalbasen	137
5 Aufgaben	139

Kapitel III Analysis einer Veränderlichen

§ 7 Unendliche Reihen

1 Reihen im Reellen	141
2 Konvergenzkriterien für Reihen	145
3 Komplexe Folgen, Vollständigkeit von \mathbb{C}	148
4 Reihen mit komplexen Gliedern	150
5 Cauchy-Kriterium und Majorantenkriterium	152
6 Umordnung von Reihen	154
7 Das Cauchy-Produkt	158

§ 8 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

1 Grenzwerte von Funktionen	159
2 Stetigkeit	165
3 Stetigkeit zusammengesetzter Funktionen	167
4 Die Hauptsätze über stetige Funktionen	168
5 Die Stetigkeit der Umkehrfunktion	172

6 Der Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit	173
§ 9 Differentialrechnung	
1 Vorbemerkungen	175
2 Differenzierbarkeit und Ableitung	177
3 Differentiation zusammengesetzter Funktionen	180
4 Mittelwertsätze und Folgerungen	183
5 Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion und Beispiele	185
6 Höhere Ableitungen und C^n -Funktionen	187
7 Taylorentwicklung	189
8 Lokale Minima und Maxima	193
9 Bestimmung von Grenzwerten nach de l'Hospital	195
§ 10 Reihenentwicklungen und Schwingungen	
1 Taylorreihen	197
2 Potenzreihen	203
3 Gliedweise Differenzierbarkeit und Identitätssatz	206
4 Theorie der Schwingungsgleichung	208
5 Lösung der Schwingungsgleichung durch komplexen Ansatz	213
§ 11 Integralrechnung	
1 Treppenfunktionen und ihr Integral	217
2 Der gleichmäßige Abstand zweier beschränkter Funktionen	220
3 Integrierbare Funktionen und Eigenschaften des Integrals	222
4 Zwei wichtige Klassen integrierbarer Funktionen	225
5 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	227
6 Partielle Integration	231
7 Die Substitutionsregel	234
8 Integration rationaler Funktionen	239
9 Integrale mit Potenzen von $\sqrt{x^2 + \alpha x + \beta}$	243
10 Übergang zum halben Winkel	245
11 Schlussbemerkungen	246
§ 12 Vertauschung von Grenzprozessen, uneigentliche Integrale	
1 Problemstellungen, Beispiele	248
2 Gleichmäßige Konvergenz von Folgen und Reihen	249
3 Vertauschung von Grenzübergängen	254
4 Uneigentliche Integrale	258
5 Substitution und partielle Integration, Gamma-Funktion	263
§ 13 Elementar integrierbare Differentialgleichungen	
1 Die lineare Differentialgleichung $y' = a(x)y + b(x)$	268
2 Zwei aufschlussreiche Beispiele	273
3 Die separierte Differentialgleichung $y' = a(x)b(y)$	275
4 Zurückführung auf getrennte Variable	282
5 Wegweiser: Differentialgleichungen in Band 1 und Band 2	283

Kapitel IV Lineare Algebra**§ 14 Vektorräume**

1 Wovon handelt lineare Algebra ?	284
2 Vektorräume	286
3 Teilmengen	289
4 Linearkombinationen, lineare Hülle, Erzeugendensystem	291
5 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	292
6 Vektorräume mit Basis	294

§ 15 Lineare Abbildungen und Matrizen

1 Beispiele linearer Abbildungen	299
2 Die Dimensionsformel	301
3 Verknüpfung linearer Abbildungen	303
4 Lineare Abbildungen und Matrizen	303
5 Matrizenrechnung	307
6 Invertierbare lineare Abbildungen und reguläre Matrizen	312
7 Basiswechsel und Koordinatentransformation	313

§ 16 Lineare Gleichungen

1 Problemstellungen und Beispiele	315
2 Allgemeines zur Lösbarkeit und zur Lösungsmenge	316
3 Rangbedingungen	317
4 Das Eliminationsverfahren für lineare Gleichungssysteme	319
5 Interpolation und numerische Quadratur	324
6 Die Methode der kleinsten Quadrate	327

§ 17 Determinanten

1 Beispiele	329
2 Definition der Determinante	331
3 Eigenschaften der Determinante	336
4 Das Volumen von Parallelflächen	340
5 Orientierung und Determinante	343

§ 18 Eigenwerte und Eigenvektoren

1 Diagonalisierbarkeit und Eigenwertproblem	344
2 Eigenwerte und Eigenvektoren	346
3 Das charakteristische Polynom	348
4 Diagonalisierbarkeit von Operatoren	350
5 Entkopplung von Systemen linearer Differentialgleichungen	353

§ 19 Skalarprodukte, Orthonormalsysteme und unitäre Gruppen

1 Skalarprodukträume	355
2 Orthonormalsysteme und orthogonale Projektionen	358
3 Das Orthonormalisierungsverfahren von Gram–Schmidt	362
4 Unitäre Abbildungen und Matrizen	364
5 Matrix- und Transformationsgruppen	369

§ 20 Symmetrische Operatoren und quadratische Formen

1 Quadratische Formen	374
2 Symmetrische Operatoren und quadratische Formen	376
3 Diagonalisierbarkeit symmetrischer Operatoren	378
4 Hauptachsentransformation	380
5 Gekoppelte Systeme von Massenpunkten	384

Kapitel V Analysis mehrerer Variabler**§ 21 Topologische Begriffe in normierten Räumen**

1 Normierte Räume	388
2 Konvergente Folgen	390
3 Offene und abgeschlossene Mengen	391
4 Inneres, Äußeres, Abschluss und Rand einer Menge	394
5 Vollständigkeit	396
6 Kompakte Mengen	397
7 Stetige Funktionen	399
8 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen	403
9 Zusammenhang, Gebiete	404

§ 22 Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

1 Differenzierbarkeit und Ableitung	406
2 Rechenregeln für differenzierbare Funktionen	414
3 Gradient, Richtungsableitung und Hauptsatz	418
4 Der Satz von Taylor	423
5 Der Umkehrsatz und der Satz über implizite Funktionen	428
6 Lokale Extrema unter Nebenbedingungen	438

§ 23 Integralrechnung im \mathbb{R}^n

1 Das Integral für Treppenfunktionen	442
2 Integration stetiger Funktionen über kompakte Quadere	446
3 Das Volumen von Rotationskörpern	450
4 Das Integral stetiger Funktionen über offene Mengen	451
5 Parameterintegrale über offene Mengen	456
6 Sukzessive Integration	458
7 Das n -dimensionale Volumen	462
8 Der Transformationssatz und Anwendungen	465

Kapitel VI Vektoranalysis**§ 24 Kurvenintegrale**

1 Kurvenstücke	470
2 Länge und Bogenlänge	472
3 Skalare Kurvenintegrale	475
4 Vektorielle Kurvenintegrale	476
5 Konservative Vektorfelder und Potentiale	480

6 Kurvenintegrale und Potentiale in der Thermodynamik	489
7 Divergenz, Laplace–Operator, Rotation, Vektorpotentiale	491
§ 25 Oberflächenintegrale	
1 Flächenstücke im \mathbb{R}^3	493
2 Der Flächeninhalt von Flächenstücken	496
3 Oberflächenintegrale	500
§ 26 Die Integralsätze von Stokes, Gauß und Green	
1 Übersicht	504
2 Der Integralsatz von Stokes	505
3 Der Stokessche Integralsatz in der Ebene	515
4 Der Integralsatz von Gauß	519
5 Anwendungen des Gaußschen Satzes, Greensche Formeln	525
6 Anwendungen der Integralsätze in der Physik	527
Kapitel VII Einführung in die Funktionentheorie	
§ 27 Die Hauptsätze der Funktionentheorie	
1 Holomorphie, Cauchy–Riemannsche Differentialgleichungen	533
2 Komplexe Kurvenintegrale und Stammfunktionen	537
3 Analytische Funktionen	544
4 Der Cauchysche Integralsatz	547
5 Die Cauchysche Integralformel und ihre Konsequenzen	549
6 Ganze Funktionen und Satz von Liouville	552
7 Der Satz von Morera und Folgerungen	554
8 Zusammenfassung der Hauptsätze	555
§ 28 Isolierte Singularitäten, Laurent–Reihen und Residuensatz	
1 Einteilung isolierter Singularitäten	556
2 Laurent–Entwicklung	557
3 Charakterisierung isolierter Singularitäten	562
4 Der Residuenkalkül	565
5 Der Residuensatz	566
6 Berechnung von Reihen mit Hilfe des Residuensatzes	567
7 Berechnung von Integralen mit Hilfe des Residuensatzes	570
Namen und Lebensdaten	573
Literaturverzeichnis	574
Symbole und Abkürzungen	576
Index	578