

Inhaltsverzeichnis

1	Ziele des Geometrieunterrichts	1
1.1	Lernziele, Kompetenzen und Leitlinien	1
1.1.1	Drei Grunderfahrungen der mathematischen Bildung	3
1.2	Allgemeine Ziele des Geometrieunterrichts	4
1.2.1	Geometrie und die Erschließung der Welt	5
1.2.2	Grundlagen wissenschaftlichen Denkens und Arbeitens	8
1.2.3	Geometrie und Problemlösen	9
1.3	Inhaltsspezifische Ziele des Geometrieunterrichts	11
1.3.1	Verständnis geometrischer Begriffe und ihrer Eigenschaften	11
1.3.2	Lernen geometrischer Denk- und Arbeitsweisen	13
1.3.3	Erkennen der Beziehung zwischen Geometrie und Wirklichkeit	14
1.4	Zur Unterrichtskultur	15
1.4.1	Instruktion und Konstruktion	16
1.4.2	Produkt und Prozess	17
1.4.3	Vernetzung und Kumulatives Lernen	17
1.4.4	Handlungsorientierung und Operatives Prinzip	18
1.4.5	Einsatz neuer Technologien	19
2	Beweisen und Argumentieren	21
2.1	Beweisen in der Geometrie	22
2.1.1	Was ist ein Beweis?	22
2.1.2	Funktionen des Beweisens	23
2.1.3	Beweis und Beweisfindung	25
2.1.4	Beweistypen	29
2.2	Beweisen und Argumentieren im Unterricht	31
2.2.1	Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern	31
2.2.2	Mathematisch argumentieren	34
2.2.3	Inhaltlich-anschauliche Beweise	39

3	Konstruieren	43
3.1	Konstruktive Zugänge zur Geometrie	43
3.1.1	Spannen von Seilen und Bändern	43
3.1.2	Falten	45
3.1.3	Zeichnen	46
3.2	Die Werkzeuge	47
3.2.1	Die Klassiker: Zirkel und Lineal	47
3.2.2	Die Praktischen: Parallelzeichner und Geodreieck	48
3.2.3	Die Modernen: Computer	49
3.3	Konstruieren als mathematische Tätigkeit	50
3.3.1	Bedeutung von <i>Zirkel-und-Lineal</i> -Konstruktionen	50
3.3.2	Was versteht man unter Konstruieren?	51
3.3.3	Konstruktionsbeschreibungen	53
3.4	Vom Einfachen zum Komplexen	55
3.4.1	Grund- und Standardkonstruktionen	55
3.4.2	Das Modulkonzept	56
3.5	Didaktische Bedeutung von Konstruktionsaufgaben	58
3.5.1	Konstruieren als Problemlösen	58
3.5.2	Warum Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen?	60
3.5.3	Konstruktionen mit dem Computer	62
4	Problemlösen	67
4.1	Problemlösen im Geometrieunterricht	68
4.1.1	Was ist ein Problem?	68
4.1.2	Schritte im Problemlöseprozess	70
4.1.3	Ziele des Problemlösens	72
4.2	Problemlösen lehren und lernen	76
4.2.1	Allgemeine heuristische Strategien	76
4.2.2	Inhaltsspezifische heuristische Strategien	80
4.2.3	Hilfen im Lösungsprozess	82
5	Begriffslernen und Begriffslehren	85
5.1	Zum Prozess der Begriffsbildung	85
5.1.1	Mentale Modelle	86
5.1.2	Phänomene als Ausgangspunkte	87
5.1.3	Arten des Begriffserwerbs	88
5.2	Lernen geometrischer Begriffe	91
5.2.1	Aufbau angemessener Vorstellungen	91
5.2.2	Erwerb von Kenntnissen	94
5.2.3	Aneignung von Fähigkeiten	95

5.3	Das Definieren geometrischer Begriffe	97
5.3.1	Logische Aspekte von Definitionen	97
5.3.2	Definitionen im Geometrieunterricht	98
5.3.3	Genetische und charakterisierende Definitionen	99
5.4	Strategien des Begriffslehrens	100
5.4.1	Kurzfristiges Lehren geometrischer Begriffe	100
5.4.2	Mittelfristiges Lehren geometrischer Begriffe	102
5.4.3	Langfristiges Lehren geometrischer Begriffe	104
6	Ebene Figuren und Körper	107
6.1	Lehren und Lernen von ebenen Figuren und Körpern	108
6.1.1	Interne und externe Bezüge	108
6.1.2	Bedeutung operativer Begriffsbildungen	109
6.2	Dreiecke	113
6.2.1	Dreiecke als Grundbausteine	113
6.2.2	Dreiecksgrundformen	116
6.3	Vierecke	120
6.3.1	Begriffsumfang der Vierecksbegriffe	121
6.3.2	Viereckseigenschaften und Haus der Vierecke	122
6.4	Körper	129
6.4.1	Lernen der Körpergrundformen	130
6.4.2	Körpermodelle und -netze	133
6.5	Räumliches Vorstellungsvermögen und Kopfgeometrie	137
6.5.1	Räumliches Vorstellungsvermögen	137
6.5.2	Kopfgeometrie	142
7	Flächeninhalt und Volumen	149
7.1	Messen als Leitidee für Flächeninhalts- und Volumenbestimmungen	150
7.1.1	Ziele	150
7.1.2	Flächen- und Volumenmessung im Laufe der Schuljahre	151
7.1.3	Aspekte des Messens	151
7.1.4	Kontexte des Messens	152
7.2	Flächeninhaltsbegriff und Volumenbegriff	157
7.2.1	Flächeninhalte und Volumina als Größenbereiche	158
7.2.2	Flächeninhaltsbegriff	159
7.2.3	Auslegen bzw. Ausfüllen	163
7.2.4	Zerlegen und Ergänzen	164
7.2.5	Flächen- und Körperverwandlungen	166
7.2.6	Approximieren von Flächen- und Rauminhalten	169
7.2.7	Zusammenhänge: Flächeninhalts- und Volumenformeln	172
7.3	Funktionale Zusammenhänge, Flächeninhalt und Volumen	172
7.4	Ausblicke	177

8	Symmetrie und Kongruenz	179
8.1	Mathematische Grundlagen von Symmetrie und Kongruenz	179
8.1.1	Symmetrie	180
8.1.2	Kongruenz	182
8.2	Symmetrie als Begriff	182
8.2.1	Symmetrie als Umweltphänomen	182
8.2.2	Entwicklung des Symmetriebegriffs	184
8.3	Der Symmetriebegriff zu Beginn der Sekundarstufe I	187
8.3.1	Symmetrische Figuren	187
8.3.2	Symmetrie-/Kongruenzabbildungen	189
8.3.3	Anwendungen der Symmetrie	190
8.4	Kongruenz	193
8.4.1	Bedeutung von Abbildungen	194
8.4.2	Die beiden Zugänge zum Kongruenzbegriff	194
8.4.3	Kongruenzsätze	195
8.4.4	Kongruenzbeweise versus Abbildungsbeweise	197
8.5	Symmetrie und Kongruenz im Raum	199
8.5.1	Kongruente Körper	199
8.5.2	Symmetrische Körper	200
9	Ähnlichkeit	203
9.1	Ähnlichkeit in Figuren	204
9.1.1	Phänomen „Ähnlichkeit“	204
9.1.2	Die Strahlensätze	207
9.1.3	Die Umkehrung der Strahlensätze	210
9.2	Ähnlichkeitsabbildungen	211
9.2.1	Geometrische Abbildungen	211
9.2.2	Die zentrische Streckung	213
9.2.3	Die Ähnlichkeitssätze	214
9.3	Anwendungen der Ähnlichkeitslehre	216
9.3.1	Der Satz des Pythagoras	216
9.3.2	Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks	218
9.3.3	Der Goldene Schnitt	219
9.3.4	Die harmonische Teilung	222
10	Trigonometrie	227
10.1	Bedeutung der Trigonometrie in der Sekundarstufe I	228
10.1.1	Bezüge zu früheren Inhalten des Mathematikunterrichts	228
10.1.2	Algebraisierung: Von Konstruktionen zu Berechnungen	229
10.1.3	Mit Dreiecken Konstruktions- und Vermessungsprobleme lösen	231
10.2	Einstiege in die Trigonometrie	232
10.2.1	Vergleich zweier Einstiege	232
10.2.2	Sinus, Kosinus und Tangens am rechtwinkligen Dreieck	233

10.3	Eigenschaften und Anwendungen von Sinus, Kosinus und Tangens	239
10.3.1	Näherungswerte bestimmen und auswerten	239
10.3.2	Exakte Bestimmung einiger Funktionswerte	240
10.3.3	Zusammenhänge zwischen Sinus, Kosinus und Tangens	241
10.3.4	Lösen von Übungs- und Anwendungsaufgaben	241
10.3.5	Berechnungen in beliebigen Dreiecken	243
10.3.6	Anwendungen der Trigonometrie in der Raumgeometrie	245
10.4	Trigonometrische Funktionen	247
10.4.1	Sinus, Kosinus und Tangens für beliebige Winkelgrößen	247
10.4.2	Graphen der trigonometrischen Funktionen	250
10.4.3	Einige Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen	251
10.5	Ausblicke	252
11	Geometrie und Geometrieunterricht	255
11.1	Geometrie als „Erdmessung“	256
11.1.1	Geometrie als praktische Lebenshilfe	256
11.1.2	Geometrie und die Darstellung unserer Umwelt	256
11.2	Geometrie und die Macht des Denkens	257
11.2.1	Thales von Milet	257
11.2.2	Pythagoras von Samos	257
11.2.3	Platon	258
11.3	Die Elemente des Euklid	259
11.3.1	Definitionen	259
11.3.2	Postulate	260
11.3.3	Axiome	260
11.4	Hilberts Grundlagen der Geometrie	261
11.4.1	Zum Wesen mathematischer Objekte	261
11.4.2	Axiome	262
11.4.3	Euklid versus Hilbert	263
11.5	Der Geometrieunterricht – hin zu Euklid	263
11.5.1	Praktischer Aspekt	264
11.5.2	Schule des Denkens	264
11.6	Der Geometrieunterricht – weg von Euklid	266
11.6.1	Bewegliche Geometrie	266
11.6.2	Abbildungsgeometrie	267
11.6.3	Kongruenzgeometrie	267
11.6.4	Aktuelle Strömungen	268
	Hinweis der Herausgeber	271
	Verwendete Abkürzungen in der Literatur	273
	Literatur	275
	Sachverzeichnis	289