

Inhaltsverzeichnis

I Grundlagen	1
1 Grundbegriffe	3
1.1 Mengen	3
1.2 Zahlenmengen: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$	5
1.2.1 Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N}$	5
1.2.2 Kommutative Gruppe der ganzen Zahlen: $\mathbb{Z}$	5
1.2.3 Körper der rationalen Zahlen: $\mathbb{Q}$	6
1.2.4 Vollständig geordneter Körper der reellen Zahlen: $\mathbb{R}$	7
1.3 Rechnen mit Symbolen	9
1.4 Gleichheitszeichen	10
1.5 Summen und Produkte	11
1.6 Potenzen und Wurzeln	12
1.7 Fakultät einer natürlichen Zahl	13
1.8 Binomialkoeffizienten	13
1.8.1 Eigenschaften der Binomialkoeffizienten	14
1.8.2 Pascal'sches Dreieck	15
1.9 Der binomische Lehrsatz	16
1.10 Der Betrag	16
1.10.1 Eigenschaften des Betrags	17
1.11 Sinus und Kosinus	18
1.12 Komplexe Zahlen	20
1.12.1 Polardarstellung komplexer Zahlen	23
1.12.2 Veranschaulichung der komplexen Multiplikation	24
1.13 Nullstellen von Polynomen	25

2 Aussagenlogik und elementare Beweistechniken	29
2.1 Grundlagen der Aussagenlogik	29
2.1.1 Die Negation (Verneinung)	30
2.1.2 Die Konjunktion	31
2.1.3 Die Disjunktion	31
2.1.4 de Morgan'sche Gesetze der Aussagenlogik	32
2.1.5 Die Implikation	33
2.1.6 Notwendige und hinreichende Bedingungen	35
2.1.7 Die Äquivalenz	36
2.2 Der indirekte Beweis	36
2.3 Vollständige Induktion	37
 II Lineare Algebra	 41
3 Vektoren im $\mathbb{R}^n$	43
3.1 Geometrische Anwendungen	47
3.1.1 Punkt-Richtung-Form einer Geraden	47
3.1.2 Punkt-Richtung-Form einer Ebene im $\mathbb{R}^n$	47
3.1.3 Abstand im $\mathbb{R}^n$	47
3.1.4 Normierung von Vektoren	49
3.2 Das Skalarprodukt	49
3.3 Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) im $\mathbb{R}^3$	52
3.4 Analytische Geometrie	54
3.4.1 Hesse-Normalform einer Ebene	54
3.4.2 Abstand eines Punktes von einer Geraden im $\mathbb{R}^3$	55
3.4.3 Drehmoment	56
3.4.4 Abstand eines Punktes von einer Ebene im $\mathbb{R}^3$	57
3.4.5 Abstand zweier windschiefer Geraden im $\mathbb{R}^3$	57
3.5 Orthogonalisierung von Vektoren	58
3.5.1 Orthogonalisierung im $\mathbb{R}^2$	58
3.5.2 Orthogonalisierung im $\mathbb{R}^3$	58
3.6 Lineare Abhängigkeit	59

4	Lineare Gleichungssysteme	67
4.1	Matrizen	69
4.2	Stufenform für lineare Gleichungssysteme	70
4.3	Lösung linearer Gleichungssysteme in Stufenform	71
4.4	Der Gauß-Algorithmus	74
4.5	Gauß-Algorithmus und lineare Abhängigkeit	77
4.6	Lösungstheorie linearer Gleichungssysteme	79
4.7	Geometrische Interpretation von Lösungsmengen	84
4.8	Praktische Lösung linearer Gleichungssysteme	85
5	Matrizenrechnung	87
5.1	Überbestimmte lineare Gleichungssysteme	94
5.2	Inverse Matrix	98
5.3	Determinanten	101
6	Das Eigenwertproblem für Matrizen	109
6.1	Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren	111
6.2	Komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren	115
6.3	Mehrfache Eigenwerte	117
6.4	Eigenwerte symmetrischer Matrizen	119
6.5	Praktische Berechnung von Eigenwerten	122
III	Differenzialrechnung in einer Veränderlichen	125
7	Funktionen	127
7.1	Eigenschaften von Funktionen	130
7.1.1	Beschränktheit	130
7.1.2	Monotonie	131
7.1.3	Periodizität	132
7.1.4	Symmetrie	132
7.1.5	Verkettung von Funktionen	133
7.2	Beispiele elementarer Funktionen	134
7.2.1	Die Potenzfunktion	135

7.2.2	Polynome	135
7.2.3	Rationale Funktionen	137
7.3	Die Umkehrfunktion	138
7.3.1	Umkehrbarkeitskriterium	141
7.4	Die Exponentialfunktion	143
7.5	Die Logarithmusfunktion	147
7.5.1	Umrechnung von Logarithmen mit unterschiedlichen Basen	149
7.5.2	Darstellung von Potenzen	150
7.5.3	Rechnen mit einer Logarithmentafel	150
7.6	Trigonometrische Funktionen	151
7.6.1	Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen	154
7.7	Hyperbolische Funktionen	157
7.7.1	Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen	158
7.7.2	Area-Funktionen	159
7.8	Implizit definierte Funktionen	160
8	Folgen	163
8.1	Konvergenz	164
8.1.1	Konvergenz und Beschränktheit	168
8.1.2	Die geometrische Folge	170
8.2	Rechenregeln für Grenzwerte	171
8.3	Grenzwertberechnung durch Abschätzen	173
8.4	Der Satz von Bolzano-Weierstraß	176
8.5	Rekursiv definierte Folgen	179
8.6	Cauchy-Folgen	181
8.7	Funktionenfolgen	184
8.8	Ausgewählte Grenzwerte	186
9	Reihen	189
9.1	Konvergenzsätze für Reihen	194
9.2	Absolut konvergente Reihen	195
9.3	Majoranten- und Minorantenkriterium	198
9.4	Wurzel- und Quotientenkriterium	200

10 Der Grenzwertbegriff für Funktionen	205
10.1 Einseitige Grenzwerte	210
10.2 Grenzwerte für $x \rightarrow \pm\infty$	211
10.3 Rechenregeln für Grenzwerte	212
10.4 Uneigentliche Grenzwerte	215
11 Stetigkeit	217
11.1 Stetigkeit reeller Funktionen	219
11.2 Einseitige Stetigkeit	223
11.3 Stetigkeit auf Intervallen	224
11.4 Charakterisierung von Unstetigkeitsstellen	225
11.5 Stetige Kompositionen	226
11.6 Stetigkeit der elementaren Funktionen	229
11.7 Eigenschaften stetiger Funktionen	230
12 Differenzialrechnung	237
12.1 Einseitige Differenzierbarkeit	240
12.2 Differenzierbare Funktionen	241
12.3 Differenzierbare Kompositionen	242
12.3.1 Die Kettenregel	244
12.4 Ableitung der Exponentialfunktion	246
12.5 Ableitung der hyperbolischen Funktionen	247
12.6 Ableitung der trigonometrischen Funktionen	247
12.7 Ableitung der Umkehrfunktion	248
12.8 Höhere Ableitungen	252
12.9 Tragweite der Differenziationsregeln	253
13 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen	255
13.1 Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung	256
13.2 Differenzierbarkeit an Nahtstellen	258
13.3 Monotonie	260
13.4 Extremwerte	262
13.4.1 Lokale Extremwerte in inneren Punkten	264
13.4.2 Globale Extremwerte	267

13.5 Konvexe und konkave Funktionen	270
13.6 Wendepunkte	273
13.7 Die Regeln von de L'Hospital	274
13.7.1 Der Fall $0 \cdot \infty$	277
13.7.2 Der Fall $\infty - \infty$	278
13.7.3 Die Fälle 0^0 , ∞^0 , 1^∞ und $1^{-\infty}$	278
13.8 Der Satz von Taylor	279
13.8.1 Die Taylor'sche Reihe	282
14 Potenzreihen	285
14.1 Komplexwertige Funktionen	293
15 Parameterdarstellung ebener Kurven	297
15.1 Glatte Kurven	300
15.2 Kurvendiskussion in Parameterdarstellung	304
15.3 Polarkoordinaten	311
15.4 Kurven in Polarkoordinaten	311
15.4.1 Diskussion einer Kurve in Polarkoordinaten	312
16 Approximation und Interpolation	317
16.1 Das Newton-Verfahren	318
16.2 Approximation mit Taylor-Polynomen	319
16.2.1 Praktische Berechnung elementarer Funktionen	321
16.3 Polynom-Interpolation	323
16.3.1 Interpolationsfehler der Polynom-Interpolation	327
16.4 Methode der kleinsten Quadrate	330
IV Integralrechnung in einer Veränderlichen	333
17 Das Riemann-Integral	335
17.1 Eigenschaften des bestimmten Integrals	344
17.2 Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	346
17.3 Differenziation von Integralfunktionen	354

18 Integrationstechniken	357
18.1 Partielle Integration	357
18.2 Die Substitutionsregel	361
18.3 Integration rationaler Funktionen	367
18.4 Elementar integrierbare Funktionen	377
19 Numerische Integration	381
19.1 Einfache Quadraturformeln	381
19.2 Interpolatorische Quadraturformeln	382
19.3 Genauigkeitsgrad von Quadraturformeln	383
19.4 Newton-Cotes-Formeln	385
19.5 Summierte Quadraturformeln	389
20 Uneigentliche Integrale	393
20.1 Majoranten- und Minorantenkriterium	397
20.2 Numerische Integration uneigentlicher Integrale	402
21 Anwendungen der Integralrechnung	403
21.1 Leibniz'sche Sektorformel	403
21.2 Schwerpunkte	405
21.3 Bogenlänge eines Funktionsgraphen	408
21.4 Volumen von Rotationskörpern	410
21.5 Mantelflächen von Rotationskörpern	413
22 Fourier-Reihen	417
22.1 Periodische Funktionen	418
22.2 Fourier-Reihen	420
22.2.1 Fourier-Reihen als Zahlenreihen	425
22.2.2 Eindeutigkeit der Fourier-Reihendarstellung	425
22.2.3 Trigonometrische Approximation	426
22.2.4 Alternative Berechnung der Fourier-Koeffizienten	427
22.2.5 Fourier-Koeffizienten p -periodischer Funktionen	428
Literaturverzeichnis	431