

Inhaltsverzeichnis

I	Differenzialrechnung mehrerer Veränderlicher	1
1	Funktionen mehrerer Veränderlicher	3
1.1	Eindimensionale Schnittkurven	6
1.2	Höhenlinien	8
1.3	Punkt Mengen im $\mathbb{R}^n$	10
1.4	Kugeln und Intervalle	11
1.5	Stetige Kurven im $\mathbb{R}^n$	12
1.6	Topologische Grundbegriffe	12
2	Stetigkeit	17
2.1	Folgen im $\mathbb{R}^n$	17
2.2	Grenzwerte multivariater Funktionen	22
2.2.1	Grenzwerte abschnittsweise definierter Funktionen	26
2.2.2	Grenzwertberechnung mithilfe von Polarkoordinaten	28
2.3	Stetigkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher	31
2.3.1	Stetige Kompositionen	33
2.4	Eigenschaften stetiger Funktionen	38
3	Differenzialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher	41
3.1	Partielle Ableitungen	44
3.1.1	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	46
3.2	Verallgemeinerung auf mehr als zwei Veränderliche	48
3.3	Differenzierbare Funktionen	49
3.3.1	Der Gradient einer differenzierbaren Funktion	55

3.4	Die Kettenregel	56
3.5	Anwendbarkeit der Differenzierungsregeln	61
4	Anwendungen der Differenzialrechnung	65
4.1	Die Richtungsableitung	65
4.1.1	Richtung des steilsten Anstiegs	69
4.2	Normalenvektoren an Kurven und Flächen	70
4.2.1	Normalenvektoren an Höhenlinien	71
4.2.2	Normalenvektoren an implizit definierte Flächen im $\mathbb{R}^3$	71
4.3	Implizite Funktionen	73
4.4	Das Newton-Verfahren im $\mathbb{R}^n$	81
4.5	Die Taylor'sche Formel	87
4.5.1	Geometrische Interpretation zum Satz von Taylor	89
5	Extremwertaufgaben	91
5.1	Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen	91
5.2	Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen	100
5.2.1	Auflösen der Nebenbedingung	101
5.2.2	Vorliegen einer Parameterdarstellung der Nebenbedingung	101
5.2.3	Das Verfahren von Lagrange	102
II	Integralrechnung mehrerer Veränderlicher	109
6	Kurvenintegrale 1. Art	111
6.1	Parameterdarstellung ebener Kurven	111
6.2	Kurvenintegrale 1. Art für ebene J-Kurven	114
6.3	Kurvenintegrale 1. Art für räumliche J-Kurven	120
7	Bereichsintegrale	123
7.1	Integration über Rechteckbereiche	123
7.2	Der Satz von Fubini	129
7.3	Integration über mehrdimensionale Quader	133
7.4	Integration über ebene Normalbereiche	135
7.5	Integration über räumliche Normalbereiche	139

8 Die Substitutionsregel für Bereichsintegrale	143
8.1 Die Substitutionsregel für ebene Bereichsintegrale	144
8.2 Die Substitutionsregel für Volumenintegrale	152
9 Flächenintegrale 1. Art	157
9.1 Parameterdarstellung gewölbter Flächen	157
9.2 Flächenintegrale 1. Art	159
 III Vektoranalysis	 165
10 Vektorfelder	167
11 Kurven- und Flächenintegrale 2. Art	169
11.1 Kurvenintegrale 2. Art	169
11.1.1 Wegunabhängigkeit	172
11.2 Flächenintegrale 2. Art	180
11.3 Zusammenfassung	185
12 Integralsätze der Vektoranalysis	187
12.1 Der Integralsatz von Gauß	187
12.1.1 Der Integralsatz von Gauß in der Ebene	194
12.1.2 Die Green'sche Identität	199
12.2 Der Integralsatz von Stokes	200
 IV Differenzialgleichungen	 207
13 Gewöhnliche Differenzialgleichungen	209
13.1 Das Richtungsfeld	214
13.2 Anfangswertprobleme	215
13.3 Separierbare Differenzialgleichungen	216
13.4 Die lineare Differenzialgleichung erster Ordnung	217
13.4.1 Die homogene Differenzialgleichung $y' + a(x)y = 0$	217
13.4.2 Die inhomogene Differenzialgleichung $y' + a(x)y = b(x)$	218
13.5 Existenz- und Eindeutigkeitssätze	220
13.6 Systeme von Differenzialgleichungen	223

14 Die lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung	227
14.1 Allgemeine Lösung der homogenen linearen DGI	228
14.2 Das Reduktionsverfahren von d'Alembert	233
14.3 Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung	234
14.4 Die lineare DGI mit konstanten Koeffizienten	237
14.4.1 Allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung	237
14.4.2 Lösungsansätze für die inhomogene Gleichung	240
15 Elementar lösbare Differenzialgleichungen	243
15.1 Die Euler'sche Differenzialgleichung	243
15.2 Differenzialgleichungen vom Typ $y' = g(y/x)$	245
15.3 Die Bernoulli'sche Differenzialgleichung	248
15.4 Die Riccati'sche Differenzialgleichung	250
15.5 Potenzreihenlösungen	251
16 Numerische Behandlung gewöhnlicher Differenzialgleichungen	259
16.1 Das explizite Euler-Verfahren	260
16.2 Das Taylor-Verfahren	263
16.3 Einschrittverfahren	266
16.3.1 Konvergenz von Einschrittverfahren	266
16.3.2 Einfluss von Rundungsfehlern	268
16.4 Einschrittverfahren aus numerischer Quadratur	268
16.4.1 Das Verfahren von Runge	269
16.4.2 Die Trapezmethode	271
16.5 Implizite Einschrittverfahren	272
16.5.1 Das implizite Euler-Verfahren	273
16.6 Runge-Kutta-Verfahren	275
16.7 Mehrschrittverfahren	279
16.8 Stabilität	280
17 Rand- und Eigenwertprobleme	285
17.1 Randwertprobleme	285
17.2 Eigenwertprobleme	289

Inhaltsverzeichnis	xi
18 Partielle Differenzialgleichungen	293
18.1 Grundtypen zweiter Ordnung	294
18.2 Die Wärmeleitungsgleichung	296
18.2.1 Lösung des homogenen 1. ARWPs mit Produktansatz	297
18.3 Die Wellengleichung	302
18.4 Die Potenzialgleichung	309
18.4.1 Dirichlet-Problem	310
18.4.2 Das Differenzenverfahren	310
18.5 Die Methode der Finiten Elemente	315
Literaturverzeichnis	317
Index	319