

# Auf einen Blick

|  |            |
|--|------------|
| <b>Über den Autor .....</b>  | <b>15</b>  |
| <b>Danksagung .....</b>  | <b>16</b>  |
| <b>Einleitung .....</b>  | <b>17</b>  |
| <b>Teil I: Grundlegende lineare Algebra .....</b>                              | <b>23</b>  |
| <b>Kapitel 1: Die Grundlagen der Mathematik: Logik, Mengen und Zahlen.....</b> | <b>25</b>  |
| <b>Kapitel 2: Von Vektoren und Matrizen.....</b>                               | <b>51</b>  |
| <b>Kapitel 3: Lineare Gleichungssysteme.....</b>                               | <b>87</b>  |
| <b>Teil II: Viel mehr lineare Algebra .....</b>                                | <b>127</b> |
| <b>Kapitel 4: Eigenwerte und Eigenvektoren.....</b>                            | <b>129</b> |
| <b>Kapitel 5: Quadratische Formen und Ausgleichsrechnung.....</b>              | <b>153</b> |
| <b>Kapitel 6: Ein wenig Dreidimensionales.....</b>                             | <b>169</b> |
| <b>Teil III: Eindimensionale Analysis .....</b>                                | <b>179</b> |
| <b>Kapitel 7: Folgen und Grenzwerte.....</b>                                   | <b>181</b> |
| <b>Kapitel 8: Stetigkeit.....</b>  | <b>205</b> |
| <b>Kapitel 9: Differentialrechnung.....</b>                                    | <b>217</b> |
| <b>Kapitel 10: Bestimmte, unbestimmte und uneigentliche Integrale.....</b>     | <b>257</b> |
| <b>Kapitel 11: Differenzieren ist Handwerk – Integrieren eine Kunst! .....</b> | <b>287</b> |
| <b>Kapitel 12: Reihen.....</b>   | <b>309</b> |
| <b>Teil IV: Der Top-Ten-Teil .....</b>   | <b>349</b> |
| <b>Kapitel 13: Zehn Dos and Don'ts der linearen Algebra .....</b>              | <b>351</b> |
| <b>Kapitel 14: Zehn wichtige Punkte in der Analysis .....</b>                  | <b>355</b> |
| <b>Kapitel 15: Wie man einen Mathekurs erfolgreich überlebt.....</b>           | <b>359</b> |
| <b>Anhang A: Lösungen der Aufgaben.....</b>                                    | <b>363</b> |
| <b>Stichwortverzeichnis .....</b>  | <b>379</b> |

# Inhaltsverzeichnis

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Über den Autor .....</b>  | <b>15</b> |
| <b>Danksagung .....</b>  | <b>16</b> |
| <b>Einleitung .....</b>  | <b>17</b> |
| Zu diesem Buch.....  | 17        |
| Konventionen in diesem Buch .....  | 18        |
| Törichte Annahmen über den Leser.....                                    | 18        |
| Wie dieses Buch aufgebaut ist .....                                      | 19        |
| Teil I: Grundlegende lineare Algebra .....                               | 19        |
| Teil II: Viel mehr lineare Algebra.....                                  | 19        |
| Teil III: Eindimensionale Analysis.....                                  | 20        |
| Teil IV: Der Top-Ten-Teil.....   | 20        |
| Symbole in diesem Buch .....   | 20        |
| Wie es weitergeht .....  | 21        |
| <br><b>TEIL I</b>  |           |
| <b>GRUNDLEGENDE LINEARE ALGEBRA.....</b>                                 | <b>23</b> |
| <b>Kapitel 1</b>   |           |
| <b>Die Grundlagen der Mathematik: Logik, Mengen<br/>und Zahlen .....</b> | <b>25</b> |
| Aussagenlogik – die Sprache der Mathematik verstehen.....                | 25        |
| Wörter erfinden: die Definition .....                                    | 26        |
| Wörter verbinden: die Aussage.....                                       | 27        |
| Rasiermesserscharfe Logik – eine Basis für alle Mathematik.....          | 27        |
| Logisch schreiben: Symbole, Symbole .....                                | 29        |
| Mengen und Relationen.....   | 30        |
| Eine Menge Mengen.....   | 31        |
| Verbundmengen .....  | 33        |
| Zahlen, Zahlen, noch mehr Zahlen .....                                   | 34        |
| Mit Hilfe der Logik zählen lernen .....                                  | 34        |
| Die Sache mit den Schulden – Negative Zahlen.....                        | 36        |
| Die ganzen Zahlen zerbrechen – Rationale Zahlen.....                     | 37        |
| Da fehlt doch was – Reelle Zahlen .....                                  | 38        |
| Komplex muss nicht kompliziert sein – komplexe Zahlen.....               | 41        |
| Eine Wurzel aus –1: Die komplexen Zahlen entstehen.....                  | 42        |
| Rechnen mit komplexen Zahlen .....                                       | 44        |
| Polarkoordinaten.....  | 47        |
| Komplexes Potenzieren und Wurzelziehen .....                             | 48        |

## 10 Inhaltsverzeichnis

### Kapitel 2

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Von Vektoren und Matrizen .....</b>                                    | <b>51</b> |
| Vektorräume .....   | 51        |
| Mehr als Pfeile .....   | 52        |
| Weitere Vektorräume entdecken .....                                       | 54        |
| Vektorrechnung mit octave .....   | 57        |
| Sind sie abhängig? .....  | 60        |
| Eine Basis eröffnet die Dimensionen .....                                 | 63        |
| Skalarprodukte und Normen: Längenmessung! .....                           | 64        |
| Lineare Abbildungen .....   | 69        |
| Ganz einfach linear! Eine formale Definition der linearen Abbildung ..... | 70        |
| Dies also ist der Abbildung Kern .....                                    | 72        |
| Lineare Abbildungen und Spaltenvektoren .....                             | 74        |
| Mehrspaltiges: Matrizen .....   | 75        |
| Zeilen zuerst, Spalten später .....                                       | 76        |
| Matrizenräume sind Vektorräume .....                                      | 77        |
| Matrixalgebra – mancherlei Matrizen multiplizieren .....                  | 78        |
| Matrizen sind – lineare Abbildungen! .....                                | 84        |

### Kapitel 3

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Lineare Gleichungssysteme .....</b>  | <b>87</b> |
| Matrizen und lineare Gleichungssysteme .....                                      | 87        |
| Für Schreibfaule – kurz und knapp mit Matrizen .....                              | 88        |
| Ja, geht das denn? Die Kerne kehren zurück .....                                  | 89        |
| Matrizenadel: Von Zeilen- und Spaltenrang .....                                   | 91        |
| Ja, das geht! Der Rang macht's möglich: Lösbarkeit .....                          | 95        |
| Determinanten bestimmen zur Lösung linearer Gleichungssysteme .....               | 97        |
| Bäumchen wechsle dich oder Permutationen .....                                    | 98        |
| Igitt! Determinanten .....  | 100       |
| Nicht gar so ekelig: Rekursiv geht's gut! .....                                   | 102       |
| Rechnen mit Determinanten und nochmal: Lösbarkeit von<br>Gleichungssystemen ..... | 106       |
| Inverse Matrix – Kehrwerte bei Matrizen .....                                     | 107       |
| Gauß-Algorithmus: Im Halbschlaf Gleichungssysteme lösen .....                     | 112       |
| Gestaffelt ist's einfach – Rückwärtlösen .....                                    | 112       |
| Endlich konkret: das Eliminationsverfahren .....                                  | 114       |
| Abhängige Spalten, was nun? .....   | 118       |
| Aufwand für Gauß und Cramer .....   | 121       |
| Nicht nur einzelne Gleichungssysteme: Berechnung der Inversen .....               | 122       |

|   |            |
|---|------------|
| <b>TEIL II</b>  |            |
| <b>VIEL MEHR LINEARE ALGEBRA.....</b>                             | <b>127</b> |
| <b>Kapitel 4</b>  |            |
| <b>Eigenwerte und Eigenvektoren .....</b>                         | <b>129</b> |
| Das Eigenwertproblem – kein Minderwertigkeitskomplex.....         | 129        |
| Ganz charakteristisch, die Gleichung.....                         | 131        |
| Eigenwerte sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms ..... | 132        |
| Ganz allein meine! Berechnung der Eigenvektoren.....              | 134        |
| Einige Eigenschaften von Eigenwerten .....                        | 137        |
| Ein Platz für die Eigenvektoren: der Eigenraum .....              | 139        |
| Eigenwerte von Dreiecks- und Diagonalmatrizen.....                | 142        |
| Ähnliche Matrizen .....   | 143        |
| Diagonalähnliche Matrizen.....                                    | 143        |
| Symmetrische und hermitesche Matrizen.....                        | 145        |
| Symmetrische Matrizen.....  | 146        |
| Orthonormierte Eigenvektoren .....                                | 149        |
| Orthogonalmatrizen.....   | 150        |
| Symmetrische und orthogonale Matrizen .....                       | 152        |
| <b>Kapitel 5</b>  |            |
| <b>Quadratische Formen und Ausgleichsrechnung.....</b>            | <b>153</b> |
| Ellipsengleichungen und quadratische Formen .....                 | 153        |
| Basiswechsel.....   | 156        |
| Hauptachsentransformation.....                                    | 157        |
| Der Physik auf der Spur: Lineare Ausgleichsrechnung.....          | 159        |
| Orthogonalität.....   | 161        |
| Orthogonalprojektion .....  | 162        |
| Ausgleichsrechnung praktisch .....                                | 163        |
| <b>Kapitel 6</b>  |            |
| <b>Ein wenig Dreidimensionales.....</b>                           | <b>169</b> |
| Nicht nur für Piloten: Orientierung in 3D.....                    | 169        |
| Oben und unten – Ebenen unterteilen den Raum.....                 | 169        |
| Orientierung einer Basis .....                                    | 170        |
| Die Rechte-Hand-Regel.....  | 171        |
| Rechtsschrauben-Regel .....                                       | 171        |
| Das Vektorprodukt .....   | 172        |

## 12 Inhaltsverzeichnis

|  |            |
|--|------------|
| <b>TEIL III</b>  |            |
| <b>EINDIMENSIONALE ANALYSIS .....</b>                                      | <b>179</b> |
| <b>Kapitel 7</b>   |            |
| <b>Folgen und Grenzwerte .....</b>   | <b>181</b> |
| Räume mit Abstand .....  | 181        |
| Topologie: die Frage nach den nachbarschaftlichen Beziehungen .....        | 181        |
| Rand- und innere Punkte .....  | 186        |
| Häufungspunkte .....   | 188        |
| Folgen .....   | 191        |
| Grenzwerte von Folgen .....  | 194        |
| Cauchy-Folgen .....  | 196        |
| Auf dem Weg zur Analysis: Reelle Zahlenfolgen .....                        | 198        |
| Mit den Folgen rechnen .....   | 200        |
| <b>Kapitel 8</b>   |            |
| <b>Stetigkeit .....</b>  | <b>205</b> |
| Grenzwerte reellwertiger Funktionen .....                                  | 205        |
| Graphische Darstellung einer Funktion mit octave .....                     | 207        |
| Rechenregeln für Grenzwerte einer Funktion .....                           | 209        |
| Springen oder nicht springen: Stetigkeit .....                             | 210        |
| Ohne abzusetzen oder $\epsilon$ - $\delta$ : Stetigkeitsdefinitionen ..... | 211        |
| Rechenregeln für stetige Funktionen .....                                  | 212        |
| Eigenschaften stetiger Funktionen .....                                    | 213        |
| <b>Kapitel 9</b>   |            |
| <b>Differentialrechnung .....</b>  | <b>217</b> |
| Die Ableitung .....  | 217        |
| Vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten .....                 | 218        |
| Und geometrisch ist das auch! .....  | 220        |
| Vorsicht: Nicht knicken! Differenzieren und Stetigkeit .....               | 221        |
| Die Ableitung regeln .....   | 224        |
| Ableitung trigonometrischer Funktionen .....                               | 225        |
| Ableitungsketten – verschachtelte Funktionen .....                         | 227        |
| Haufenweise Beispiele zur Kettenregel .....                                | 228        |
| Ableitung von Umkehrfunktionen .....                                       | 232        |
| Wiederholtes Differenzieren: Höhere Ableitungen .....                      | 234        |
| Play it again, Sam! Ableitungen ableiten .....                             | 234        |
| Funktionen vom Feinsten – stetige Differenzierbarkeit .....                | 236        |
| Ganz oben und ganz unten – Maxima und Minima .....                         | 237        |
| Globale und lokale Extremstellen .....                                     | 238        |
| Bestimmung von Extremstellen .....   | 239        |
| Der Mittelwertsatz – gerade mit krumm vergleichen .....                    | 241        |
| Ein Extremum muss sein: der Satz von Rolle .....                           | 242        |
| Schieß geht es auch: der Mittelwertsatz .....                              | 243        |
| Grenzwerte ableiten und die Regeln von de l'Hospital .....                 | 244        |
| Kurvendiskussion .....   | 248        |

## **Kapitel 10**

### **Bestimmte, unbestimmte und uneigentliche Integrale ..... 257**

|   |     |
|---|-----|
| Ein bestimmtes Integral .....                             | 257 |
| Krummlinige Flächen berechnen .....                       | 258 |
| Einfache Rechenregeln für bestimmte Integrale.....        | 263 |
| Und jetzt umgekehrt: Stammfunktionen.....                 | 266 |
| Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung..... | 267 |
| Das unbestimmte Integral .....                            | 270 |
| Alle meine Stammfunktionen.....                           | 270 |
| Nicht auf Sand gebaut: Grundintegrale .....               | 273 |
| Was ist eigentlich ein uneigentliches Integral?.....      | 274 |
| Die Sache mit den Randpunkten .....                       | 274 |
| Und wieder einmal: Grenzwerte.....                        | 275 |
| Vergleichskriterien .....                                 | 277 |
| Parameterintegrale.....                                   | 280 |
| Eigenschaften eigentlicher Parameterintegrale .....       | 281 |
| Variable Integrationsgrenzen.....                         | 283 |
| Uneigentliche Parameterintegrale .....                    | 284 |

## **Kapitel 11**

### **Differenzieren ist Handwerk – Integrieren eine Kunst! ..... 287**

|  |     |
|--|-----|
| Scheibchenweise integrieren: Partielle Integration .....             | 287 |
| Hier hilft die Produktregel.....                                     | 288 |
| Unbestimmt: Partielle Integration zur Bestimmung von Stammfunktionen | 288 |
| Und bestimmt! Partielle Integration bei bestimmten Integralen .....  | 292 |
| Die Schwierigkeiten verstecken: Substitution .....                   | 293 |
| Hin- und hersubstituieren .....                                      | 294 |
| Sinus- und Kosinusintegrale.....                                     | 296 |
| Und noch eine Variante der Substitution .....                        | 297 |
| Partialbruchzerlegung – Integrale rationaler Funktionen.....         | 300 |
| Zerlegung in einfache Brüche.....                                    | 301 |
| Zwei Sorten Partialbrüche bleiben übrig.....                         | 301 |
| Partialbruchzerlegung bei unbestimmter Integration.....              | 306 |

## **Kapitel 12**

### **Reihen ..... 309**

|   |     |
|---|-----|
| Immer längere Summen: Unendliche Reihen.....                            | 309 |
| Bausteine stapeln oder Schildkrötenrennen .....                         | 310 |
| Alternierende Reihen: Schritt vor, Schritt zurück.....                  | 317 |
| Absolute Konvergenz? Unbedingt! .....                                   | 317 |
| Wann konvergiert's? – Cauchy, Leibniz und Co .....                      | 321 |
| Potenzreihen .....  | 326 |
| Potenzreihen oder unendlich lange Polynome.....                         | 326 |
| Wo konvergiert's denn? .....  | 327 |
| Was ist das denn? Eine Funktion!.....                                   | 330 |
| Differentiation und Integration von Potenzreihen – Stück für Stück..... | 335 |

## **14 Inhaltsverzeichnis**

|   |            |
|---|------------|
| Taylorreihen .....  | 337        |
| Funktionen ertasten: Approximation durch Polynome .....                                 | 338        |
| Den Spieß umdrehen – Funktionen als Reihe .....   | 340        |
| Des Schneiders Trickkiste: Taylorentwicklung für Dummies.....                           | 345        |
| <b>TEIL IV</b>  |            |
| <b>DER TOP-TEN-TEIL.....</b>  | <b>349</b> |
| <b>Kapitel 13</b>   |            |
| <b>Zehn Dos and Don'ts der linearen Algebra.....</b>                                    | <b>351</b> |
| <b>Kapitel 14</b>   |            |
| <b>Zehn wichtige Punkte in der Analysis .....</b>                                       | <b>355</b> |
| <b>Kapitel 15</b>   |            |
| <b>Wie man einen Mathekurs erfolgreich überlebt.....</b>                                | <b>359</b> |
| Mathematik und Psychologie.....   | 359        |
| Warum Mathematiker eine seltsame Sprache sprechen.....                                  | 360        |
| Nicht locker lassen!.....   | 360        |
| Was tun, wenn Sie mal gefehlt haben? .....  | 361        |
| Der Unterschied zwischen einer Mathematikvorlesung und einer<br>Theatervorstellung..... | 361        |
| Glauben Sie nichts!.....  | 361        |
| Üben Sie! Üben Sie! .....   | 362        |
| Die richtige Wahl einer Übungsgruppe.....   | 362        |
| Üben Sie nicht allein!.....   | 362        |
| <b>Anhang A</b>   |            |
| <b>Lösungen der Aufgaben.....</b>   | <b>363</b> |
| Kapitel 1 .....   | 363        |
| Kapitel 2.....  | 365        |
| Kapitel 3.....  | 366        |
| Kapitel 4.....  | 367        |
| Kapitel 5.....  | 368        |
| Kapitel 7.....  | 369        |
| Kapitel 8.....  | 371        |
| Kapitel 9.....  | 372        |
| Kapitel 10.....   | 372        |
| Kapitel 11 .....  | 373        |
| Kapitel 12 .....  | 375        |
| <b>Stichwortverzeichnis .....</b>   | <b>379</b> |