

Auf einen Blick

Über den Autor	15
Danksagung	16
Einleitung	17
Teil I: Grundlegende lineare Algebra	23
Kapitel 1: Die Grundlagen der Mathematik: Logik, Mengen und Zahlen	25
Kapitel 2: Von Vektoren und Matrizen	51
Kapitel 3: Lineare Gleichungssysteme	87
Teil II: Viel mehr lineare Algebra	127
Kapitel 4: Eigenwerte und Eigenvektoren	129
Kapitel 5: Quadratische Formen und Ausgleichsrechnung	153
Kapitel 6: Ein wenig Dreidimensionales	169
Teil III: Eindimensionale Analysis	179
Kapitel 7: Folgen und Grenzwerte	181
Kapitel 8: Stetigkeit	205
Kapitel 9: Differentialrechnung	217
Kapitel 10: Bestimmte, unbestimmte und uneigentliche Integrale	257
Kapitel 11: Differenzieren ist Handwerk – Integrieren eine Kunst!	287
Kapitel 12: Reihen	309
Teil IV: Der Top-Ten-Teil	349
Kapitel 13: Zehn Dos and Don'ts der linearen Algebra	351
Kapitel 14: Zehn wichtige Punkte in der Analysis	355
Kapitel 15: Wie man einen Mathekurs erfolgreich überlebt	359
Anhang A: Lösungen der Aufgaben	363
Stichwortverzeichnis	379

Inhaltsverzeichnis

Über den Autor	15
Danksagung	16
Einleitung	17
Zu diesem Buch	17
Konventionen in diesem Buch	18
Törichte Annahmen über den Leser	18
Wie dieses Buch aufgebaut ist	19
Teil I: Grundlegende lineare Algebra	19
Teil II: Viel mehr lineare Algebra	19
Teil III: Eindimensionale Analysis	20
Teil IV: Der Top-Ten-Teil	20
Symbole in diesem Buch	20
Wie es weitergeht	21
 TEIL I	
GRUNDLEGENDE LINEARE ALGEBRA	23
Kapitel 1	
Die Grundlagen der Mathematik: Logik, Mengen	
und Zahlen	25
Aussagenlogik – die Sprache der Mathematik verstehen	25
Wörter erfinden: die Definition	26
Wörter verbinden: die Aussage	27
Rasiermesserscharfe Logik – eine Basis für alle Mathematik	27
Logisch schreiben: Symbole, Symbole	29
Mengen und Relationen	30
Eine Menge Mengen	31
Verbundmengen	33
Zahlen, Zahlen, noch mehr Zahlen	34
Mit Hilfe der Logik zählen lernen	34
Die Sache mit den Schulden – Negative Zahlen	36
Die ganzen Zahlen zerbrechen – Rationale Zahlen	37
Da fehlt doch was – Reelle Zahlen	38
Komplex muss nicht kompliziert sein – komplexe Zahlen	41
Eine Wurzel aus -1 : Die komplexen Zahlen entstehen	42
Rechnen mit komplexen Zahlen	44
Polarkoordinaten	47
Komplexes Potenzieren und Wurzelziehen	48

10 Inhaltsverzeichnis

Kapitel 2

Von Vektoren und Matrizen 51

Vektorräume	51
Mehr als Pfeile	52
Weitere Vektorräume entdecken	54
Vektorrechnung mit octave	57
Sind sie abhängig?	60
Eine Basis eröffnet die Dimensionen	63
Skalarprodukte und Normen: Längenmessung!	64
Lineare Abbildungen	69
Ganz einfach linear! Eine formale Definition der linearen Abbildung	70
Dies also ist der Abbildung Kern	72
Lineare Abbildungen und Spaltenvektoren	74
Mehrspaltiges: Matrizen	75
Zeilen zuerst, Spalten später	76
Matrizenräume sind Vektorräume	77
Matrixalgebra – mancherlei Matrizen multiplizieren	78
Matrizen sind – lineare Abbildungen!	84

Kapitel 3

Lineare Gleichungssysteme 87

Matrizen und lineare Gleichungssysteme	87
Für Schreibfaule – kurz und knapp mit Matrizen	88
Ja, geht das denn? Die Kerne kehren zurück	89
Matrizenadel: Von Zeilen- und Spaltenrang	91
Ja, das geht! Der Rang macht's möglich: Lösbarkeit	95
Determinanten bestimmen zur Lösung linearer Gleichungssysteme	97
Bäumchen wechsele dich oder Permutationen	98
Igitt! Determinanten	100
Nicht gar so eklig: Rekursiv geht's gut!	102
Rechnen mit Determinanten und nochmal: Lösbarkeit von Gleichungssystemen	106
Inverse Matrix – Kehrwerte bei Matrizen	107
Gauß-Algorithmus: Im Halbschlaf Gleichungssysteme lösen	112
Gestaffelt ist's einfach – Rückwärtslösen	112
Endlich konkret: das Eliminationsverfahren	114
Abhängige Spalten, was nun?	118
Aufwand für Gauß und Cramer	121
Nicht nur einzelne Gleichungssysteme: Berechnung der Inversen	122

TEIL II	
VIEL MEHR LINEARE ALGEBRA	127
Kapitel 4	
Eigenwerte und Eigenvektoren	129
Das Eigenwertproblem – kein Minderwertigkeitskomplex	129
Ganz charakteristisch, die Gleichung	131
Eigenwerte sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms	132
Ganz allein meine! Berechnung der Eigenvektoren	134
Einige Eigenschaften von Eigenwerten	137
Ein Platz für die Eigenvektoren: der Eigenraum	139
Eigenwerte von Dreiecks- und Diagonalmatrizen	142
Ähnliche Matrizen	143
Diagonalähnliche Matrizen	143
Symmetrische und hermitesche Matrizen	145
Symmetrische Matrizen	146
Orthonormierte Eigenvektoren	149
Orthogonalmatrizen	150
Symmetrische und orthogonale Matrizen	152
Kapitel 5	
Quadratische Formen und Ausgleichsrechnung	153
Ellipsengleichungen und quadratische Formen	153
Basiswechsel	156
Hauptachsentransformation	157
Der Physik auf der Spur: Lineare Ausgleichsrechnung	159
Orthogonalität	161
Orthogonalprojektion	162
Ausgleichsrechnung praktisch	163
Kapitel 6	
Ein wenig Dreidimensionales	169
Nicht nur für Piloten: Orientierung in 3D	169
Oben und unten – Ebenen unterteilen den Raum	169
Orientierung einer Basis	170
Die Rechte-Hand-Regel	171
Rechtsschrauben-Regel	171
Das Vektorprodukt	172

12 Inhaltsverzeichnis

TEIL III	
EINDIMENSIONALE ANALYSIS	179
Kapitel 7	
Folgen und Grenzwerte	181
Räume mit Abstand	181
Topologie: die Frage nach den nachbarschaftlichen Beziehungen	181
Rand- und innere Punkte	186
Häufungspunkte	188
Folgen	191
Grenzwerte von Folgen	194
Cauchy-Folgen	196
Auf dem Weg zur Analysis: Reelle Zahlenfolgen	198
Mit den Folgen rechnen	200
Kapitel 8	
Stetigkeit	205
Grenzwerte reellwertiger Funktionen	205
Graphische Darstellung einer Funktion mit octave	207
Rechenregeln für Grenzwerte einer Funktion	209
Springen oder nicht springen: Stetigkeit	210
Ohne abzusetzen oder ε - δ : Stetigkeitsdefinitionen	211
Rechenregeln für stetige Funktionen	212
Eigenschaften stetiger Funktionen	213
Kapitel 9	
Differentialrechnung	217
Die Ableitung	217
Vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten	218
Und geometrisch ist das auch!	220
Vorsicht: Nicht knicken! Differenzieren und Stetigkeit	221
Die Ableitung regeln	224
Ableitung trigonometrischer Funktionen	225
Ableitungsketten – verschachtelte Funktionen	227
Haufenweise Beispiele zur Kettenregel	228
Ableitung von Umkehrfunktionen	232
Wiederholtes Differenzieren: Höhere Ableitungen	234
Play it again, Sam! Ableitungen ableiten	234
Funktionen vom Feinsten – stetige Differenzierbarkeit	236
Ganz oben und ganz unten – Maxima und Minima	237
Globale und lokale Extremstellen	238
Bestimmung von Extremstellen	239
Der Mittelwertsatz – gerade mit krumm vergleichen	241
Ein Extremum muss sein: der Satz von Rolle	242
Schief geht es auch: der Mittelwertsatz	243
Grenzwerte ableiten und die Regeln von de l'Hospital	244
Kurvendiskussion	248

Kapitel 10**Bestimmte, unbestimmte und uneigentliche Integrale 257**

Ein bestimmtes Integral	257
Krummlinige Flächen berechnen	258
Einfache Rechenregeln für bestimmte Integrale	263
Und jetzt umgekehrt: Stammfunktionen	266
Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	267
Das unbestimmte Integral	270
Alle meine Stammfunktionen	270
Nicht auf Sand gebaut: Grundintegrale	273
Was ist eigentlich ein uneigentliches Integral?	274
Die Sache mit den Randpunkten	274
Und wieder einmal: Grenzwerte	275
Vergleichskriterien	277
Parameterintegrale	280
Eigenschaften eigentlicher Parameterintegrale	281
Variable Integrationsgrenzen	283
Uneigentliche Parameterintegrale	284

Kapitel 11**Differenzieren ist Handwerk – Integrieren eine Kunst! 287**

Scheibchenweise integrieren: Partielle Integration	287
Hier hilft die Produktregel	288
Unbestimmt: Partielle Integration zur Bestimmung von Stammfunktionen	288
Und bestimmt! Partielle Integration bei bestimmten Integralen	292
Die Schwierigkeiten verstecken: Substitution	293
Hin- und hersubstituieren	294
Sinus- und Kosinusintegrale	296
Und noch eine Variante der Substitution	297
Partialbruchzerlegung – Integrale rationaler Funktionen	300
Zerlegung in einfache Brüche	301
Zwei Sorten Partialbrüche bleiben übrig	301
Partialbruchzerlegung bei unbestimmter Integration	306

Kapitel 12**Reihen 309**

Immer längere Summen: Unendliche Reihen	309
Bausteine stapeln oder Schildkrötenrennen	310
Alternierende Reihen: Schritt vor, Schritt zurück	317
Absolute Konvergenz? Unbedingt!	317
Wann konvergiert's? – Cauchy, Leibniz und Co	321
Potenzreihen	326
Potenzreihen oder unendlich lange Polynome	326
Wo konvergiert's denn?	327
Was ist das denn? Eine Funktion!	330
Differentiation und Integration von Potenzreihen – Stück für Stück	335

14 Inhaltsverzeichnis

Taylorreihen	337
Funktionen ertasten: Approximation durch Polynome	338
Den Spieß umdrehen – Funktionen als Reihe	340
Des Schneiders Trickkiste: Taylorentwicklung für Dummies.....	345
TEIL IV	
DER TOP-TEN-TEIL.....	349
Kapitel 13	
Zehn Dos and Don'ts der linearen Algebra.....	351
Kapitel 14	
Zehn wichtige Punkte in der Analysis	355
Kapitel 15	
Wie man einen Mathekurs erfolgreich überlebt.....	359
Mathematik und Psychologie.....	359
Warum Mathematiker eine seltsame Sprache sprechen.....	360
Nicht locker lassen!.....	360
Was tun, wenn Sie mal gefehlt haben?	361
Der Unterschied zwischen einer Mathematikvorlesung und einer Theatervorstellung.....	361
Glauben Sie nichts!.....	361
Üben Sie! Üben Sie!	362
Die richtige Wahl einer Übungsgruppe	362
Üben Sie nicht allein!	362
Anhang A	
Lösungen der Aufgaben.....	363
Kapitel 1	363
Kapitel 2.....	365
Kapitel 3.....	366
Kapitel 4.....	367
Kapitel 5.....	368
Kapitel 7.....	369
Kapitel 8.....	371
Kapitel 9.....	372
Kapitel 10	372
Kapitel 11	373
Kapitel 12.....	375
Stichwortverzeichnis	379