

Inhaltsverzeichnis

1 Folgen und Grenzwerte: Was verrät mir die verzwickte Grenzwertdefinition?	1
1.1 Folgen	2
1.1.1 Beispiele für Folgen	5
1.1.2 Eigenschaften von Folgen	10
1.2 Die gefürchtete Grenzwertdefinition	14
1.3 Kleine Beweise	24
1.4 Typische Grenzwerte	29
1.5 Noch mehr Begriffe	41
1.5.1 Landau'sches Ordnungssymbol	41
1.5.2 Häufungspunkte	42
2 Reihen: Wie kann man unendlich viele Zahlen addieren?	45
2.1 Der Begriff der Reihe	46
2.2 Prominente Reihen	54
2.3 Konvergenzkriterien	61
2.3.1 Quotientenkriterium	63
2.3.2 Wurzelkriterium	66
2.3.3 Leibniz-Kriterium	67
3 Komplexe Zahlen: Wie rechnet man mit etwas, das es nicht gibt?	71
3.1 Tun wir mal so, als ob	72
3.2 Komplexe Zahlen	73
3.2.1 Kartesische Darstellung	76
3.2.2 Polardarstellung	79
3.3 Wurzeln und der Hauptsatz der Algebra	81
4 Funktionen: Sind eine Eheschließung und ein Ehepaar dasselbe?	85
4.1 Funktion oder Abbildung	86
4.1.1 Definition einer Funktion	88
4.1.2 Noch abstraktere Definition einer Funktion	91
4.2 Eigenschaften von Funktionen	93
4.3 Umkehrabbildung	96

5	Stetigkeit: Kann man einen Strich nur einen Punkt lang zeichnen? ...	99
5.1	Wasserhahn und Duschtemperatur	100
5.1.1	Folgenkriterium	102
5.1.2	ε - δ -Kriterium	103
5.1.3	Definition oder Satz	105
5.2	Punktbegriff und stetige Funktion	106
5.3	Eigenschaften stetiger Funktionen	108
5.3.1	Zwischenwertsatz	108
5.3.2	Maximum auf abgeschlossenen Intervallen	111
6	Vektoren und Vektorräume: Wissen Mathematiker nicht, was ein Vektor ist?	115
6.1	Algebraische Strukturen	116
6.1.1	Skalare und Körper	117
6.1.2	Vektorräume und Vektoren	119
6.1.3	Beispiele für Vektorräume	122
6.2	Linearkombination und lineare Hülle.....	124
7	Lineare Unabhängigkeit: Kann man mit Vektoren alles machen?	127
7.1	Übergeneralisierung als typischer Fehler	128
7.2	Lineare Unabhängigkeit von Vektoren	131
7.3	Andere Operationen mit Vektoren	137
8	Lineare Abbildungen: Ist die Reihenfolge von Handlungen vertauschbar?	141
8.1	Vertauschbare und nicht vertauschbare mathematische Handlungen	142
8.2	Lineare Abbildungen	145
8.2.1	Lineare Abbildungen in Euklidischen Räumen	147
8.2.2	Weitere lineare Operationen	151
8.3	Und wozu jetzt genau?	152
9	Kern und Bild: Sind Sonne und Schatten mathematische Gebilde?	155
9.1	Kern und Bild einer linearen Abbildung	155
9.2	Aussagen über lineare Abbildungen	161
9.2.1	Wirkung und Darstellung einer linearen Abbildung	161
9.2.2	Injektive und surjektive lineare Abbildungen	163
9.3	Unterbestimmte Gleichungssysteme	164
10	Eigenwerte und Eigenvektoren: Was ist eigen am Eigenwert?	169
10.1	Einführende Betrachtungen	169
10.2	Eigenvektoren als konservierte Richtungen	171
10.2.1	Mathematische Definition	172
10.2.2	Ein verdrehtes Beispiel	173
10.2.3	Projektion	176
10.2.4	Drehung	177
10.3	Ausblick auf Schwingungen	181

10.3.1	Federschwinger	181
10.3.2	Schwingende Saite	182
11	Taylor-Entwicklung: Kann Mathematik prophezeien?	187
11.1	Vorhersagen	188
11.2	Taylor-Polynome und Taylor-Reihe	191
11.2.1	Die Vorhersage auf mathematisch	192
11.2.2	Restglied	197
11.2.3	Exponential- und Sinusreihe	200
11.3	Regel von de l'Hospital	201
12	Landau-Symbole: Warum sollte man ungenau rechnen?	207
12.1	Zeitbedarf von Algorithmen	208
12.2	Differenzenquotienten und Restglieder	211
12.3	Ein Wort zum Schluss	213
Anhang A	Differenzial- und Integralrechnung	215
A.1	Differenzieren	215
A.2	Integrieren	220
Anhang B	Symbole	225
Sachverzeichnis		229