

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Konzepte der numerischen Mathematik	2
1.2	Definition eines Algorithmus	9
1.3	Fehler, Fehlerverstärkung und Konditionierung	19
1.4	Zahldarstellung	22
1.5	Rundungsfehleranalyse und Stabilität von numerischen Algorithmen	30

Teil I Numerische Methoden der linearen Algebra

2	Grundlagen der linearen Algebra	35
3	Lineare Gleichungssysteme	45
3.1	Störungstheorie und Stabilitätsanalyse von linearen Gleichungssystemen	46
3.2	Das Gaußsche Eliminationsverfahren und die LR-Zerlegung	50
3.3	LR-Zerlegung für diagonaldominante Matrizen	62
3.4	Die Cholesky-Zerlegung für positiv definite Matrizen	64
3.5	Dünn besetzte Matrizen und Bandmatrizen	66
3.6	Nachiteration	73
3.7	Exkurs	78
3.7.1	Konzepte des parallelen Rechnens	78
3.7.2	Parallele LR-Zerlegung	86
4	Orthogonalisierungsverfahren und die QR-Zerlegung	91
4.1	Die QR-Zerlegung	91
4.2	Das Gram-Schmidt-Verfahren	94
4.3	Householder-Transformationen	102
4.4	Givens-Rotationen	109
4.5	Überbestimmte Gleichungssysteme	113
4.6	Exkurs	122

5	Berechnung von Eigenwerten	125
5.1	Konditionierung der Eigenwertaufgabe	126
5.2	Direkte Methode	130
5.3	Iterative Verfahren	131
5.4	Zerlegungsverfahren zur Eigenwertbestimmung	137
5.5	Reduktionsmethoden	148
5.6	Singulärwertzerlegung und Pseudoinverse	154
5.6.1	Singulärwertzerlegung	154
5.6.2	Pseudoinverse einer Matrix	160
5.7	Exkurs	166
5.7.1	Mathematische Modellierung	167
5.7.2	Numerische Approximation der Differentialgleichung	174

Teil II Numerische Methoden der Analysis

6	Nullstellenbestimmung	185
6.1	Stabilität und Kondition	187
6.2	Intervallschachtelung	192
6.3	Das Newton-Verfahren	194
6.3.1	Varianten des Newton-Verfahrens	201
6.3.2	Globalisierungsmethoden	211
6.4	Exkurs	214
6.4.1	Ein lineares Anfangswertproblem	216
6.4.2	Ein nichtlineares Anfangswertproblem	220
6.5	Konvergenzbegriffe	222
6.6	Vergleich des Newton-Verfahrens mit dessen Varianten	226
6.7	Nullstellensuche im $\mathbb{R}^n$	233
6.7.1	Newton-Verfahren im $\mathbb{R}^n$	238
6.7.2	Globalisierung des Newton-Verfahrens	244
6.8	Exkurs	250
6.8.1	Das Verfahren von Bairstow	254
6.8.2	Das komplexe Newton-Verfahren	257
6.9	Exkurs	262
6.9.1	Shading - Schnelle Berechnung von Normalvektoren	263
6.9.2	Newton-Verfahren zur Berechnung der inversen Wurzel	264
6.9.3	Bestimmung des Startwerts	266
7	Numerische Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme	275
7.1	Konstruktion von Fixpunktverfahren	278
7.2	Konvergenzkriterium für Jacobi- und Gauß-Seidel-Iteration	280

7.3	Relaxationsverfahren: das SOR-Verfahren	285
7.4	Praktische Aspekte	290
7.5	Abstiegs- und Gradientenverfahren	292
7.6	Exkurs	300
7.7	Exkurs	307
7.8	Das CG-Verfahren	312
7.8.1	Vorkonditionierung	323
7.8.2	Krylow-Teilraum-Verfahren für allgemeine Matrizen	326
7.9	Exkurs	328
7.9.1	Modellierung	328
7.9.2	Diskretisierung	333
7.9.3	Finite-Differenzen-Approximation	334
7.9.4	Numerische Lösung	339
7.9.5	Fehlerabschätzung für die Finite-Differenzen-Methode	341
7.9.6	Beispiele	344
8	Interpolation und Approximation	351
8.1	Polynominterpolation	353
8.1.1	Lagrangesche Darstellung	355
8.1.2	Newtonsche Darstellung	356
8.1.3	Interpolation von Funktionen und Fehlerabschätzungen	360
8.1.4	Hermite-Interpolation	366
8.2	Stückweise Interpolation	366
8.3	Numerische Differentiation	373
8.3.1	Approximation der ersten Ableitung	374
8.3.2	Approximation der zweiten Ableitung	375
8.3.3	Stabilität der numerischen Differentiation	376
8.4	Richardson-Extrapolation zum Limes	378
8.5	Numerische Quadratur	385
8.5.1	Interpolatorische Quadratur	387
8.5.2	Stückweise interpolatorische Quadraturformeln	392
8.5.3	Romberg-Quadratur	395
8.5.4	Integration periodischer Funktionen	400
8.5.5	Gauß-Quadratur	402
8.5.6	Gauß-Legendre-Quadratur	405
8.5.7	Legendre-Polynome und zweistufige Orthogonalisierung	412
8.5.8	Gauß-Tschebyscheff-Quadratur	418
8.6	Exkurs	424
8.7	Bestapproximation	427
8.7.1	Gauß-Approximation - beste Approximation in der L^2 -Norm	428
8.7.2	Tschebyscheff-Approximation	436
8.8	Trigonometrische Interpolation	445

8.9 Schnelle Fourier-Transformation	454
8.10 Exkurs	457
Verzeichnis der Exkurse	467
Literaturverzeichnis	469
Sachverzeichnis	473