

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	V
1 Mathematische Begriffe und Schreibweisen	1
1.1 Zahlen.....	1
1.1.1 Zahlendarstellung auf der Zahlengeraden	2
1.2 Mengen	3
1.2.1 Aufzählende Mengenschreibweise	4
1.2.2 Beschreibende Mengenschreibweise	4
1.2.3 Mengendiagramme	4
1.2.4 Beziehungen zwischen Mengen (Mengenrelationen)	5
1.2.5 Mengenverknüpfung (Mengenoperationen)	5
1.3 Intervallschreibweisen	8
1.4 Symbole der Logik	9
2 Elementare Rechenoperationen	10
2.1 Grundrechenarten mit Termen	10
2.1.1 Addition und Subtraktion (Rechnen mit Klammertermen)	11
2.1.2 Klammern in Klammern	11
2.2 Multiplikation und Division	12
2.2.1 Multiplikation mit negativen Zahlen	12
2.2.2 Multiplikation mit Null (Nullprodukt)	12
2.2.3 Multiplikation mit Summentermen	13
2.2.4 Binomische Formeln	14
2.2.5 Quotienten aus positiven und negativen Zahlen	17
2.2.6 Rechnen mit Bruchtermen	19
3 Potenzen	29
3.1 Potenzbegriff	29
3.2 Potenzgesetze	29
3.2.1 Addition und Subtraktion von Potenzen	29
3.2.2 Multiplikation von Potenzen	30
3.2.3 Division von Potenzen	31
3.2.4 Potenzieren von Potenzen	32
3.3 Erweiterung des Potenzbegriffes auf a^1 , a^0 und Potenzen mit negativen ganzen Hochzahlen	33
3.4 Besondere Potenzen (Zehnerpotenzen)	34
3.5 Potenzen von Binomen	37
4 Wurzeln	40
4.1 Wurzelbegriff	40
4.1.1 Quadratwurzeln	40
4.1.2 Der allgemeine Wurzelbegriff	43

4.2	Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Hochzahlen	44
4.3	Rechnen mit Wurzel- und Potenztermen	46
5	Logarithmen	51
5.1	Logarithmenbegriff	51
5.2	Logarithmensysteme	52
5.2.1	Natürliche Logarithmen	52
5.2.2	Zehnerlogarithmen	53
5.3	Logarithmengesetze	54
6	Gleichungen	58
6.1	Äquivalenz von Aussageformen	58
6.2	Lösungsverfahren (<i>Äquivalenzumformungen</i>)	59
6.3	Einfache lineare Gleichungen	60
6.4	Bruchgleichungen	62
6.5	Gleichungen mit Formvariablen	66
6.6	Verhältnissgleichungen (Proportionen)	71
6.7	Textliche Gleichungen	75
6.7.1	Allgemeine textliche Gleichungen	75
6.7.2	Mischungsaufgaben	76
6.7.3	Bewegungsaufgaben	79
6.7.4	Behälteraufgaben	82
6.7.5	Arbeitsaufgaben	84
6.8	Quadratische Gleichungen	87
6.8.1	Reinquadratische Gleichungen	88
6.8.2	Gemischtquadratische Gleichungen ohne Absolutglied (Defektquadratische Gleichungen)	90
6.8.3	Gemischtquadratische Gleichungen	90
6.8.4	Lösbarkeit quadratischer Gleichungen, Diskriminante	92
6.8.5	Biquadratische Gleichungen	93
6.9	Wurzelgleichungen	96
6.9.1	Wurzelgleichungen mit einer Variablen	96
6.9.2	Wurzelgleichungen mit zwei Variablen	99
6.10	Exponentialgleichungen	101
7	Ungleichungen	106
7.1	Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen	106
7.2	Einfache lineare Ungleichungen	109
7.3	Bruchungleichungen	109
7.4	Lineares Optimieren	115
8	Systeme linearer Gleichungen	124
8.1	Graphisches Lösungsverfahren von Gleichungssystemen	124
8.2	Rechnerische Lösungsverfahren von Gleichungssystemen	126
8.2.1	Das Gleichsetzungsverfahren	126
8.2.2	Das Einsetzungsverfahren	127

8.2.3	Das Additionsverfahren	130
8.2.4	Das Determinantenverfahren	132
8.2.5	Gleichungssysteme mit Bruchtermen	134
8.3	Lösungsverfahren für Gleichungssysteme mit drei und mehr Variablen	137
8.4	Textaufgaben mit zwei Variablen	144
8.4.1	Mischungsaufgaben	144
8.4.2	Bewegungsaufgaben	145
8.4.3	Behälteraufgaben	146
9	Funktionen	150
9.1	Funktionsbegriff	150
9.1.1	Darstellungsarten von Funktionen	152
9.2	Funktionsarten	153
9.3	Ganzrationale Funktionen 1. Grades	154
9.3.1	Die lineare Funktion $x \mapsto mx$	154
9.3.2	Die Funktion mit der Funktionsgleichung $y = mx + b$ (Hauptform der Geradengleichung)	155
9.4	Quadratische Funktionen	157
9.4.1	Einfache quadratische Grundfunktionen	158
9.4.2	Die allgemeine quadratische Funktion	160
9.4.3	Die Scheitelform der quadratischen Funktion	161
9.4.4	Extremwerte	163
9.5	Potenzfunktionen	166
9.6	Wurzelfunktionen	168
9.6.1	Quadratwurzelfunktion	168
9.6.2	Wurzelfunktionen höherer Ordnung	171
9.7	Exponentialfunktionen	173
9.7.1	Die allgemeine Exponentialfunktion	173
9.7.2	Die e-Funktion	175
9.8	Logarithmusfunktionen	181
9.8.1	Die allgemeine Logarithmusfunktion	181
9.8.2	Die natürliche Logarithmusfunktion	182
9.9	Koordinatensystem mit logarithmischer Teilung	184
9.10	Trigonometrische Funktionen als Funktionsgraphen	185
9.10.1	Die Schaubilder der Sinus- und Kosinusfunktion	187
9.10.2	Die Schaubilder der Tangens- und Kotangensfunktion	193
10	Analytische Geometrie	195
10.1	Länge und Steigung von Strecken	195
10.2	Teilpunkte von Strecken	197
10.2.1	Mittelpunkte von Strecken	197
10.2.2	Beliebiger Teilpunkt T einer Strecke	197
10.3	Geradengleichungen	198
10.3.1	Hauptform der Geradengleichung	198
10.3.2	Punkt-Steigungs-Form	199
10.3.3	Zwei-Punkte-Form	200

10.3.4	Achsenabschnittsform	200
10.3.5	Hesse-Form der Geradengleichung	202
10.4	Winkel zwischen Geraden	205
10.4.1	Winkel zwischen Gerade und x-Achse (Steigung und Steigungswinkel) ..	205
10.4.2	Schnittwinkel zweier Geraden	206
10.5	Orthogonale Geraden	207
10.6	Kreisgleichungen	209
10.6.1	Mittelpunktsgleichung eines Kreises	209
10.6.2	Allgemeine Kreisgleichung	210
10.7	Kreis und Gerade	212
10.8	Parabeln und Hyperbeln	216
10.8.1	Brennpunkteigenschaften der Parabel	216
10.8.2	Brennpunkteigenschaften der Hyperbel	218

Trigonometrie

11	Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck	219
11.1	Seitenverhältnisse als Winkelfunktionen	219
11.2	Definition der Winkelfunktionen	220
11.3	Längen- und Winkelberechnungen	220
11.3.1	Die Sinusfunktion	220
11.3.2	Die Kosinusfunktion	222
11.3.3	Die Tangens- und Kotangensfunktion	225
11.3.4	Vermischte Aufgaben	226
11.4	Zusammenhang zwischen den Winkelfunktionen	232
11.5	Winkelfunktionen beliebiger Winkel	234
11.6	Additionstheoreme (Summen- und Differenzgleichungen von Winkelfunktionen) ..	238
11.7	Trigonometrische Gleichungen (Goniometrische Gleichungen)	242
12	Winkelfunktionen am schiefwinkligen Dreieck	244
12.1	Sinussatz	244
12.2	Kosinussatz	251
12.3	Flächenberechnung des schiefwinkligen Dreiecks	259

Geometrie

13	Ähnlichkeit	261
13.1	Strahlensätze	261
13.2	Streckenteilung und Mittelwerte	268
13.3	Stetige Teilung (Goldener Schnitt)	271
14	Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck	275
14.1	Satz des Pythagoras	275
14.2	Kathetensatz (Satz des Euklid) und Höhensatz	288

15 Flächenberechnung	293
15.1 Geradlinig begrenzte Flächen	293
15.2 Kreisförmig begrenzte Flächen	296
16 Volumenberechnung	304
16.1 Prismatische Körper	304
16.2 Pyramidenförmige und kegelförmige Körper	310
16.2.1 Pyramide und Pyramidenstumpf	310
16.2.2 Kegel und Kegelstumpf	311
16.3 Kugelförmige Körper	315
16.3.1 Vollkugel	315
16.3.2 Kugelabschnitt (Kugelsegment)	318
16.3.3 Kugelschicht	319
16.3.4 Kugelausschnitt (Kugelsektor)	322
16.4 Schiefe Körper	327
16.4.1 Satz des Cavalieri	327
16.4.2 Simpson'sche Regel	328
16.5 Oberflächen und Volumina von Rotationskörpern	330
Differentialrechnung	
17 Grenzwerte	333
17.1 Grenzwerte von Zahlenfolgen	333
17.2 Grenzwerte von Funktionen	334
17.2.1 Grenzwerte für $x \rightarrow x_0$	334
17.2.2 Grenzwerte für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$	336
17.2.3 Rechenregeln für Grenzwerte	338
18 Stetigkeit von Funktionen	339
19 Differentiation elementarer Funktionen (Steigungsberechnung bei Funktionsgraphen)	341
19.1 Differenzenquotient und Differentialquotient	341
19.2 Ableitung von Potenzfunktionen	342
19.3 Allgemeine Ableitungsregeln	343
19.4 Ableitung elementarer Funktionen (Übersicht)	346
19.5 Höhere Ableitungen	347
19.6 Horner-Schema und Nullstellen ganzrationaler Funktionen	350
19.6.1 Polynomdivision	350
19.6.2 Horner-Schema	351
19.7 Das Newton'sche Näherungsverfahren	354
19.8 Anwendung der Differentialrechnung bei ganzrationalen Funktionen	356
19.8.1 Kurvendiskussion	356
19.8.2 Linearisierung einer Funktion	363
19.8.3 Funktionssynthese	364
19.8.4 Extremwertaufgaben	368

19.9	Gebrochenrationale Funktionen	375
19.10	Trigonometrische Funktionen	385
19.10.1	Ableitungen	385
19.10.2	Funktionsuntersuchung trigonometrischer Funktionen	386
19.10.3	Funktionssynthese trigonometrischer Funktionen	391
19.11	Logarithmus- und Exponentialfunktionen	394
19.11.1	Ableitungen	394
19.11.2	Funktionsuntersuchung von Exponentialfunktionen	395
19.11.3	Funktionssynthese von Exponentialfunktionen	398

Integralrechnung

20	Das Integral	400
20.1	Die Flächeninhaltsfunktion	400
20.2	Stammfunktionen und unbestimmtes Integral	401
20.3	Grundintegrale elementarer Funktionen	403
20.4	Das bestimmte Integral als Fläche	403
20.5	Die Fläche als Grenzwert	404
20.6	Flächenberechnung mit Hilfe der Integralrechnung	406
20.6.1	Flächen zwischen Funktionsgraph und x-Achse	406
20.6.2	Flächen zwischen zwei Funktionsgraphen	409
20.7	Das bestimmte Integral als Volumen (Volumen von Rotationskörpern)	417
20.7.1	Rotationssymmetrie zur x-Achse	417
20.7.2	Rotationssymmetrie zur y-Achse	418

Vektorrechnung – Vektoralgebra

21	Vektoren (im Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$)	419
21.1	Definition eines Vektors	419
21.2	Ortsvektoren	420
21.3	Betrag eines Vektors	421
21.4	Vektoren im Raum	421
21.4.1	Vektor-Addition	421
21.4.2	Vektor-Subtraktion	422
21.4.3	Anwendungsbeispiele	422
21.4.4	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar (S-Multiplikation)	423
21.4.5	Lineare Abhängigkeit von Vektoren	424
22	Produkte von Vektoren	430
22.1	Das Skalarprodukt	430
22.1.1	Winkel zwischen Vektoren	430
22.1.2	Definition des Skalarproduktes	431
22.1.3	Anwendungen des Skalarproduktes	432
22.2	Das Vektorprodukt	434
22.2.1	Definition des Vektorproduktes	434
22.2.2	Anwendungen des Vektorproduktes	436

22.3	Das Spatprodukt	439
22.3.1	Definition des Spatproduktes	439
22.3.2	Anwendungen des Spatproduktes	440

Analytische Geometrie auf Vektoralbasis

23	Geraden im Raum	443
23.1	Vektorielle Geradengleichungen in Parameterform	443
23.1.1	Punkt-Richtungs-Gleichung	443
23.1.2	Zwei-Punkte-Gleichung	444
23.2	Darstellung von Geraden	445
23.2.1	Räumliche Darstellung im Koordinatensystem	445
23.2.2	Projektion einer Geraden auf die Koordinatenebenen	446
23.2.3	Spurpunkte von Geraden	447
23.3	Spezielle Geraden	449
23.4	Schnittpunkt zweier Geraden	451
24	Ebenen, vektorielle Darstellungen	455
24.1	Parameterdarstellung einer Ebene	455
24.1.1	Punkt-Richtungs-Gleichung	455
24.1.2	Drei-Punkte-Gleichung	456
24.2	Koordinatengleichung der Ebene	457
24.3	Achsenabschnittsgleichung	458
24.4	Zeichnerische Darstellung von Ebenen	458
24.4.1	Spurgeraden von Ebenen	458
24.4.2	Zeichnen einer Ebene	460
24.5	Normalenformen der Ebenengleichung	462
24.5.1	Punkt-Normalengleichung der Ebene	462
24.5.2	Hesse'sche Normalengleichung der Ebene	464
24.6	Umrechnung von Ebenengleichungen	465
25	Anwendungen	469
25.1	Schnittwinkel	469
25.1.1	Schnittwinkel von Gerade und Ebene	469
25.1.2	Schnittwinkel zweier Ebenen	470
25.1.3	Schnittwinkel zweier Geraden	470
25.2	Abstandsberechnungen	472
25.2.1	Abstand eines Punktes von einer Ebene	472
25.2.2	Abstand einer Ebene vom Ursprung	473
25.2.3	Abstand paralleler Ebenen	473
25.2.4	Abstand eines Punktes von einer Geraden	474
25.2.5	Abstand windschiefer Geraden	475
25.3	Inzidenz von Geraden und Ebenen	479
25.3.1	Schnittgerade zweier Ebenen	479
25.3.2	Schnittpunkt von Geraden und Ebenen	481
25.3.3	Parallelität und Inzidenz von Ebenen	483
25.3.4	Parallelität und Inzidenz von Geraden	484

Komplexe Zahlen und Funktionen	
26 Komplexe Zahlen	485
26.1 Imaginäre Zahlen	485
26.2 Komplexe Zahlen	487
26.3 Gauß'sche Zahlenebene	488
27 Darstellungsformen komplexer Zahlen	489
27.1 Komplexe Zahlen in kartesischer Form (Komponentenform oder algebraischer Form)	489
27.2 Komplexe Zahlen in Polarform	491
27.2.1 Trigonometrische Form	491
27.2.2 Komplexe Zahlen in Exponentialform	492
28 Komplexe Arithmetik	493
28.1 Rechenoperationen in der Komponentenform	493
28.1.1 Addition und Subtraktion komplexer Zahlen	493
28.1.2 Multiplikation und Division komplexer Zahlen	494
28.2 Rechenoperationen in der Polarform	495
28.2.1 Multiplikation in der trigonometrischen Form	495
28.2.2 Division in der trigonometrischen Form	496
28.2.3 Multiplikation in der Exponentialform	497
28.2.4 Division in der Exponentialform	497
28.2.5 Potenzen und Wurzeln	498
28.2.6 Spezielle Punktmengen in der komplexen Ebene	501
28.2.7 Logarithmieren in der Exponentialform	503
29 Anwendungen der komplexen Rechnung	505
29.1 Komplexe Funktionen	505
29.2 Komplexe Darstellung von Schwingungen	506
29.3 Komplexe Widerstände	509
29.4 Ortskurven	511
29.5 Inversion einer Ortskurve	513
Ergebnisse	516
Sachwortverzeichnis	552