

# Inhalt

**Vorwort zur deutschen Auflage — V**

**Vorwort zur dritten Auflage — VII**

**Vorwort zur zweiten Auflage — IX**

**Vorwort zur ersten Auflage — X**

<b>1</b>	<b>Ausgewählte Kapitel der Analysis — 1</b>
1.1	Elementare Mathematik — 1
1.1.1	Zahlen, Variable und elementare Funktionen — 1
1.1.2	Quadratische und kubische Gleichungen — 5
1.1.3	Inhalte ähnlicher Figuren am Beispiel der Ellipse — 8
1.1.4	Algebraische Kurven zweiter Ordnung — 10
1.2	Differential- und Integralrechnung — 15
1.2.1	Regeln zur Differentiation — 15
1.2.2	Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung — 16
1.2.3	Invarianzeigenschaften der Differentiale — 16
1.2.4	Regeln zur Integration — 17
1.2.5	Die Taylor-Reihe — 18
1.2.6	Komplexe Variable — 20
1.2.7	Approximation von Funktionen — 21
1.2.8	Jacobi-Matrix, funktionale Unabhängigkeit, Variablentransformationen in Mehrfachintegralen — 22
1.2.9	Lineare Unabhängigkeit von Funktionen, Wronski-Determinante — 23
1.2.10	Integration durch Quadratur — 24
1.2.11	Differentialgleichungen für Familien von Kurven — 25
1.3	Vektoranalysis — 27
1.3.1	Vektoralgebra — 28
1.3.2	Vektorwertige Funktionen — 30
1.3.3	Vektorfelder — 31
1.3.4	Die drei klassischen Integralsätze — 32
1.3.5	Die Laplace-Gleichung — 33
1.3.6	Differentiation von Determinanten — 34
1.4	Differential-algebraische Notationen — 34
1.4.1	Differenzierbare Variablen, totale Ableitungen — 34
1.4.2	Höhere Ableitungen von Produkten und zusammengesetzten Funktionen — 35
1.4.3	Differentialfunktionen mehrerer Veränderlicher — 36

1.4.4	Der Körper der Differentialgleichungen —	37
1.4.5	Die Transformation von Ableitungen —	39
1.5	Variationsrechnung —	41
1.5.1	Prinzip vom kleinsten Zwang —	41
1.5.2	Die Euler–Lagrange-Gleichungen in mehreren Veränderlichen —	42

## **2 Mathematische Modelle — 46**

2.1	Einführung —	46
2.2	Naturphänomene —	47
2.2.1	Populationsmodelle —	47
2.2.2	Ökologie: Radioaktive Abfallprodukte —	48
2.2.3	Die Keplerschen Gesetze und Newtons Gravitationsgesetz —	49
2.2.4	Der freie Fall eines Körpers in Erdnähe —	51
2.2.5	Meteoriten —	51
2.2.6	Ein Modell für fallenden Regen —	53
2.3	Beispiele aus Physik und Ingenieurwesen —	55
2.3.1	Newtons Abkühlungsgesetz —	55
2.3.2	Mechanische Schwingungen, das Pendel —	61
2.3.3	Der Bruch getriebener Achsen —	65
2.3.4	Die Van-der-Polsche Gleichung —	67
2.3.5	Die Telegraphengleichung —	68
2.3.6	Elektrodynamik —	69
2.3.7	Die Dirac-Gleichung —	70
2.3.8	Strömungsmechanik —	71
2.3.9	Die Navier–Stokes-Gleichungen —	72
2.3.10	Das Modell eines Bewässerungssystems —	72
2.3.11	Magnetohydrodynamik —	73
2.4	Diffusionsphänomene —	74
2.4.1	Lineare Wärmeleitungsgleichung —	74
2.4.2	Die nichtlineare Wärmeleitungsgleichung —	76
2.4.3	Die Burgers- und Korteweg–de-Vries-Gleichung —	76
2.4.4	Mathematisches Modellieren in der Finanzwirtschaft —	77
2.5	Biomathematik —	78
2.5.1	Flinke Champignons ( <i>smart mushrooms</i> ) —	78
2.5.2	Ein Wachstumsmodell für Tumore —	81
2.6	Wellenphänomene —	82
2.6.1	Kleine Schwingungen einer Stange ( <i>string</i> ) —	82
2.6.2	Die schwingende Membran —	85
2.6.3	Minimalflächen —	87
2.6.4	Schwingungen, schwache Stäbe und Blechplatten —	88
2.6.5	Nichtlineare Wellen —	90
2.6.6	Die Gleichungen von Chaplygin und Tricomi —	91

<b>3</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen, traditionelle Lösungsmethoden — 93</b>
3.1	Einführung und elementare Methoden — 93
3.1.1	Differentialgleichungen, Anfangswertprobleme — 93
3.1.2	Die Integration der Gleichung $y^{(n)} = f(x)$ — 95
3.1.3	Homogene Differentialgleichungen — 95
3.1.4	Verschiedene Arten der Homogenität — 98
3.1.5	Reduktion der Ordnung — 100
3.1.6	Linearisierung durch Differentiation — 100
3.2	Gleichungen erster Ordnung — 101
3.2.1	Separable Gleichungen — 101
3.2.2	Exakte Differentialgleichungen — 101
3.2.3	Der integrierende Faktor (A. Clairaut, 1739) — 103
3.2.4	Die Riccati-Gleichung — 104
3.2.5	Die Bernoulli-Gleichung — 108
3.2.6	Homogene lineare Gleichungen — 108
3.2.7	Inhomogene lineare Gleichungen, Variation der Konstanten — 109
3.3	Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung — 111
3.3.1	Homogene Gleichung: Superposition — 111
3.3.2	Homogene Gleichungen: Äquivalenzeigenschaften — 112
3.3.3	Homogene Gleichungen: Konstante Koeffizienten — 115
3.3.4	Inhomogene Gleichungen: Variation der Parameter — 117
3.3.5	Besselsche Differentialgleichung und Bessel-Funktionen — 121
3.3.6	Hypergeometrische Differentialgleichung — 121
3.4	Lineare Gleichungen höherer Ordnung — 123
3.4.1	Homogene Gleichungen, Fundamentalsystem — 123
3.4.2	Inhomogene Gleichungen, Variation der Konstanten — 123
3.4.3	Gleichungen mit konstanten Koeffizienten — 124
3.4.4	Die Eulersche Gleichung — 126
3.5	Systeme von Gleichungen erster Ordnung — 126
3.5.1	Allgemeine Eigenschaften von Systemen — 126
3.5.2	Erste Integrale — 127
3.5.3	Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten — 132
3.5.4	Variation der Konstanten für Systeme — 133
<b>4</b>	<b>Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung — 138</b>
4.1	Einführung — 138
4.2	Lineare homogene Gleichungen — 139
4.3	Teilweise inhomogene Gleichungen — 140
4.4	Quasi-lineare Gleichungen — 142
4.5	Systeme homogener Gleichungen — 145

<b>5</b>	<b>Lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung — 151</b>
5.1	Gleichungen mit mehreren Variablen — 151
5.1.1	Klassifikation an einem festen Punkt — 151
5.1.2	Adjungierte lineare Differentialoperatoren — 153
5.2	Die Klassifikation von Gleichungen mit zwei unabhängigen Variablen — 155
5.2.1	Charakteristiken. Drei Typen von Gleichungen — 155
5.2.2	Die Standardform hyperbolischer Gleichungen — 157
5.2.3	Die Standardform der parabolischen Gleichung — 158
5.2.4	Die Standardform elliptischer Gleichung — 159
5.2.5	Gleichungen gemischten Typs — 160
5.2.6	Der Typ von nichtlinearen Gleichungen — 161
5.3	Integration hyperbolischer Gleichungen mit zwei Variablen — 162
5.3.1	Die d'Alembertsche Lösungsmethode — 162
5.3.2	Gleichungen, reduzierbar auf die Wellengleichung — 163
5.3.3	Die Eulersche Methode — 167
5.3.4	Die Laplacesche Kaskadenmethode — 170
5.4	Anfangswertprobleme — 172
5.4.1	Die Wellengleichung — 172
5.4.2	Die Inhomogene Wellengleichung — 174
5.5	Gemischte Probleme, Variablenseparation — 175
5.5.1	Schwingung einer Saite mit festen Enden — 176
5.5.2	Das gemischte Problem für die Wärmeleitungsgleichung — 180
<b>6</b>	<b>Nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen — 184</b>
6.1	Einführung — 184
6.2	Transformationsgruppen — 185
6.2.1	Einparametrische Gruppen in der Ebene — 185
6.2.2	Der Gruppen-Generator und Lie-Gleichung — 186
6.2.3	Die Exponentialabbildung — 188
6.2.4	Die Invarianten und invariante Gleichungen — 189
6.2.5	Kanonische Variablen — 192
6.3	Symmetrien von Gleichungen erster Ordnung — 193
6.3.1	Erste Prolongation der Gruppengeneratoren — 193
6.3.2	Symmetrie-Gruppe: Definition und Eigenschaften — 194
6.3.3	Gleichungen mit vorgegebener Symmetrie — 196
6.4	Die Integration von Gleichungen erster Ordnung unter Benutzung von Symmetrien — 198
6.4.1	Der Liesche integrierende Faktor — 198
6.4.2	Integration unter Verwendung kanonischer Variablen — 200
6.4.3	Invariante Lösungen — 204
6.4.4	Konstruktion der allgemeinen Lösung aus invarianten Lösungen — 204

6.5	Gleichungen zweiter Ordnung — 206
6.5.1	Zweite Prolongation der Gruppengeneratoren. Berechnung von Symmetrien — 206
6.5.2	Lie-Algebren — 208
6.5.3	Standard-Formen zweidimensionaler Lie-Algebren — 210
6.5.4	Die Liesche Integrationsmethode — 211
6.5.5	Integration linearer Gleichungen mit bekannten Teillösungen — 217
6.5.6	Lies Test auf Linearisierbarkeit — 219
6.6	Gleichungen höherer Ordnung — 223
6.6.1	Invariante Lösungen, Herleitung des Eulerschen Ansatzes — 223
6.6.2	Integrierender Faktor (N. H. Ibragimov, 2006) — 224
6.6.3	Linearisierung von Gleichungen dritter Ordnung — 232
6.7	Nichtlineare Superposition — 239
6.7.1	Einführung — 239
6.7.2	Hauptsatz der nichtlinearen Superposition — 241
6.7.3	Beispiele zur nichtlinearen Superposition — 246
6.7.4	Integration von Systemen mit Hilfe der nichtlinearen Superposition — 254
<b>7</b>	<b>Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen — 259</b>
7.1	Symmetrien — 259
7.1.1	Definition und Berechnung von Symmetrie-Gruppen — 259
7.1.2	Gruppentransformationen von Lösungen — 264
7.2	Gruppeninvariante Lösungen — 266
7.2.1	Einführung — 266
7.2.2	Die Burgers-Gleichung — 267
7.2.3	Ein nichtlineares Randwertproblem — 270
7.2.4	Invariante Lösungen für ein Bewässerungssystem — 273
7.2.5	Invariante Lösungen für ein Tumor-Wachstumsmodell — 275
7.2.6	Ein Beispiel aus der nichtlinearen Optik — 277
7.3	Invarianz und Erhaltungssätze — 278
7.3.1	Einleitung — 278
7.3.2	Vorbereitungen — 281
7.3.3	Das Noethersche Theorem — 283
7.3.4	Lagrange-Funktionen höherer Ordnung — 283
7.3.5	Erhaltungssätze für gewöhnliche Differentialgleichungen — 284
7.3.6	Verallgemeinerung des Noetherschen Theorems — 285
7.3.7	Beispiele aus der klassischen Mechanik — 286
7.3.8	Herleitung der Einsteinschen Energie-Gleichung — 289
7.3.9	Erhaltungssätze für die Dirac-Gleichung — 290

<b>8</b>	<b>Verallgemeinerte Funktionen oder Distributionen — 294</b>
8.1	Einführung verallgemeinerter Funktionen — 294
8.1.1	Heuristische Betrachtungen — 294
8.1.2	Definition und Beispiele für Distributionen — 296
8.1.3	Die Darstellung der $\delta$ -Funktion als Grenzwert — 297
8.2	Operationen mit Distributionen — 298
8.2.1	Multiplikation mit einer Funktion — 298
8.2.2	Differentiation — 299
8.2.3	Das direkte Produkt von Distributionen — 299
8.2.4	Faltungen — 300
8.3	Die Distribution $\Delta(r^{2-n})$ — 301
8.3.1	Der Mittelwert über eine Kugel — 301
8.3.2	Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta u(r) = 0$ — 301
8.3.3	Die Berechnung der Distribution $\Delta(r^{2-n})$ — 302
8.4	Die Transformation von Distributionen — 304
8.4.1	Die Motivation durch lineare Transformationen — 304
8.4.2	Die Variablentransformation für die $\delta$ -Funktion — 305
8.4.3	Beliebige Transformationsgruppen — 305
8.4.4	Die infinitesimale Transformation von Distributionen — 307
<b>9</b>	<b>Invarianzprinzip und Fundamentallösung — 310</b>
9.1	Einleitung — 310
9.2	Das Invarianzprinzip — 311
9.2.1	Formulierung des Invarianzprinzips — 311
9.2.2	Fundamentallösung von linearen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten — 311
9.2.3	Anwendung auf die Laplace-Gleichung — 312
9.2.4	Anwendung auf die Wärmeleitungsgleichung — 314
9.3	Das Cauchy-Problem der Wärmeleitungsgleichung — 316
9.3.1	Fundamentallösung für das Cauchy-Problem — 316
9.3.2	Herleitung der Fundamentallösung für das Cauchy-Problem mit Hilfe des Invarianzprinzips — 316
9.3.3	Lösung des Cauchy-Problems — 318
9.4	Die Wellengleichung — 319
9.4.1	Elementares zu Differentialformen — 319
9.4.2	Hilfreiche Gleichungen mit Distributionen — 323
9.4.3	Symmetrien und Definition der Fundamentallösungen für die Wellengleichung — 325
9.4.4	Herleitung der Fundamentallösung — 327
9.4.5	Lösung des Cauchy-Problems — 328
9.5	Gleichungen mit variablen Koeffizienten — 329

**Lösungen — 331**

**Literatur — 343**

**Stichwortverzeichnis — 345**