

Inhaltsverzeichnis

Leitfaden	1
1 Gruppen	5
1.1 Halbgruppen, Gruppen und Untergruppen	5
1.1.1 Innere Verknüpfungen und Halbgruppen	5
1.1.2 Beispiele	6
1.1.3 Definition einer Gruppe	8
1.1.4 Abschwächung der Gruppenaxiome	9
1.1.5 Translationen und Kürzungsregeln	10
1.1.6 Definition einer Untergruppe	11
1.1.7 Erzeugung von Untergruppen	12
1.1.8 Untergruppen von $\mathbb{Z}$, Kongruenzen und Restklassen	13
1.1.9 Beispiele	18
1.2 Homomorphismen und Normalteiler	28
1.2.1 Definition eines Homomorphismus	28
1.2.2 Beispiele	30
1.2.3 Nebenklassen	36
1.2.4 Ordnung und Index	38
1.2.5 Beispiele	40
1.2.6 Definition eines Normalteilers	44
1.2.7 Homomorphismen und Normalteiler	45
1.2.8 Faktorgruppen	46
1.2.9 Beispiele	47
1.3 Isomorphiesätze, Produkte von Gruppen und zyklische Gruppen	50
1.3.1 Isomorphiesätze	50
1.3.2 Äußeres direktes Produkt	53
1.3.3 Inneres direktes Produkt	54
1.3.4 Äußeres semidirektes Produkt*	58
1.3.5 Inneres semidirektes Produkt*	60
1.3.6 Beispiele*	62
1.3.7 Zyklische Gruppen	69
1.3.8 Teilbarkeit ganzer Zahlen	71
1.3.9 Der Chinesische Restsatz	75

1.3.10	Der euklidische Algorithmus	77
1.3.11	Produkte zyklischer Gruppen	81
1.3.12	Untergruppen zyklischer Gruppen	83
1.3.13	Zerlegung einer zyklischen Gruppe	84
1.3.14	Primrestklassengruppen	85
1.3.15	Automorphismen zyklischer Gruppen*	90
1.3.16	Beispiele	91
1.3.17	Unendlich zyklische und frei-abelsche Gruppen*	97
1.4	Operationen von Gruppen auf Mengen	102
1.4.1	Definition einer Operation	102
1.4.2	Beispiele	103
1.4.3	Bahnenraum und Standgruppe	104
1.4.4	Die Klassengleichung*	106
1.4.5	Zyklenzerlegung einer Permutation	108
1.4.6	Beispiele	110
1.5	Symmetriegruppen*	115
1.5.1	Regelmäßige n -Ecke und die Diedergruppe	115
1.5.2	Endliche Untergruppen von $O(2)$	117
1.5.3	Symmetrien des Tetraeders	119
1.5.4	Symmetrien von Würfel und Oktaeder	120
1.5.5	Symmetrien von Ikosaeder und Dodekaeder	123
1.5.6	Die Klassengleichung der Ikosaedergruppe	126
1.5.7	Endliche Untergruppen von $SO(3)$	128
1.5.8	Symmetrien von Fußbällen	128
1.6	Struktursätze	130
1.6.1	Elemente zu vorgegebener Ordnung	130
1.6.2	Struktursatz für endliche abelsche Gruppen	132
1.6.3	Endliche abelsche p -Gruppen*	137
1.6.4	Klassifikation der endlichen abelschen Gruppen*	138
1.6.5	Endlich erzeugte abelsche Gruppen*	142
1.6.6	Spaltung in Torsion und freien Anteil *	144
1.6.7	Endliche p -Gruppen*	147
1.6.8	Die Sätze von SYLOW*	149
1.6.9	Beispiele*	154
1.7	Einfache und auflösbare Gruppen*	162
1.7.1	Einfache Gruppen	162
1.7.2	Kommutatorgruppen	164
1.7.3	Beispiele	165
1.7.4	Auflösbare Gruppen	166
1.7.5	Auflösbarkeit von p -Gruppen	169
2	Ringe	171
2.1	Grundbegriffe	171
2.1.1	Definition eines Rings	171
2.1.2	Einheiten, Körper, Unterringe	173

2.1.3	Ringhomomorphismen	175
2.1.4	Beispiele	176
2.1.5	Polynomringe	183
2.1.6	Grad eines Polynoms	186
2.1.7	Division mit Rest	188
2.1.8	Nullstellen und Werte von Polynomen	190
2.1.9	Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$	192
2.1.10	Polynome in mehreren Veränderlichen*	194
2.1.11	Endliche Untergruppen der multiplikativen Gruppe eines Körpers	198
2.1.12	Einbettung einer Halbgruppe in eine Gruppe	200
2.1.13	Quotientenkörper	202
2.1.14	Beispiele	204
2.2	Ideale und Restklassenringe	206
2.2.1	Definition von Idealen	206
2.2.2	Ideale und Einheiten	207
2.2.3	Restklassenringe	208
2.2.4	Isomorphiesätze	209
2.2.5	Beispiele	210
2.2.6	Hauptidealringe und noethersche Ringe	213
2.2.7	Euklidische Ringe	215
2.2.8	Beispiele	216
2.2.9	Der Hilbertsche Basissatz*	220
2.2.10	Operationen mit Idealen*	222
2.2.11	Der Chinesische Restsatz*	223
2.2.12	Beispiele*	225
2.2.13	Primideale und maximale Ideale	227
2.2.14	Beispiele	229
2.2.15	Existenz maximaler Ideale und das Lemma von ZORN*	231
2.3	Teilbarkeit in Integritätsringen	235
2.3.1	Teiler und assoziierte Elemente	235
2.3.2	Irreduzible Elemente und Primelemente	236
2.3.3	Teilerketten	240
2.3.4	Primzahlen	242
2.3.5	Faktorielle Ringe	245
2.3.6	Gemeinsame Teiler und Vielfache	247
2.3.7	Polynomringe über faktoriellen Ringen	249
2.3.8	Irreduzibilitätskriterien für Polynome	255
2.3.9	Beispiele	259
2.3.10	Ringe holomorpher Funktionen*	264
2.4	Quadratische Zahlkörper und Zahlringe*	266
2.4.1	Quadratische Zahlkörper	266
2.4.2	Quadratische Zahlringe	269
2.4.3	Einheiten in quadratischen Zahlringen	271
2.4.4	Euklidische quadratische Zahlringe	276

2.4.5	Faktorzerlegung in quadratischen Zahlringen	280
2.4.6	Ideale als ideale Zahlen	287
3	Körpererweiterungen	291
3.1	Grundbegriffe	291
3.1.1	Charakteristik und Primkörper	292
3.1.2	Grad einer Körpererweiterung	293
3.1.3	Adjunktion von Elementen	295
3.1.4	Algebraische und transzendente Elemente	297
3.1.5	Das Minimalpolynom	299
3.1.6	Beispiele	301
3.1.7	Algebraische Körpererweiterungen	306
3.1.8	Algebraisch abgeschlossene Körper	309
3.2	Konstruktion von Körpererweiterungen	313
3.2.1	Symbolische Adjunktion von Nullstellen	313
3.2.2	Existenz und Fortsetzung von Körperisomorphismen	315
3.2.3	Zerfällungskörper eines Polynoms	320
3.2.4	Beispiele	324
3.2.5	Der algebraische Abschluss*	328
3.3	Einfache und mehrfache Nullstellen	332
3.3.1	Vielfachheit von Nullstellen und formale Ableitung	332
3.3.2	Separabilität	335
3.3.3	Der Frobenius-Homomorphismus	337
3.3.4	Endliche Körper	339
3.3.5	Beispiele	342
3.3.6	Algebraischer Abschluss eines endlichen Körpers	345
3.3.7	Der Satz vom primitiven Element	346
3.3.8	Beispiele	347
3.3.9	Resultanten*	349
3.3.10	Diskriminanten*	353
3.3.11	Beispiele*	355
3.4	Galois-Theorie	359
3.4.1	Symmetrische Polynome	359
3.4.2	Die Galoisgruppe	364
3.4.3	Fixkörper	370
3.4.4	Galois-Erweiterungen	373
3.4.5	Der Hauptsatz der Galois-Theorie	376
3.4.6	Beispiele	379
3.4.7	Der Fundamentalsatz der Algebra*	383
3.4.8	Diskriminante und Galois-Gruppe*	387
3.4.9	Galois-Theorie endlicher Körper*	389
3.5	Lösung von Polynomgleichungen*	391
3.5.1	Quadratische Gleichungen	391
3.5.2	Kubische Gleichungen	391
3.5.3	Beispiele	395

3.5.4	Gleichungen vierten Grades	397
3.5.5	Beispiele	401
3.5.6	Kreisteilung in Charakteristik Null	404
3.5.7	Kreisteilung in Charakteristik $p > 0$	411
3.5.8	Reine Polynome	414
3.5.9	Zyklische Erweiterungen	417
3.5.10	Lösbarkeit von Polynomgleichungen	419
3.5.11	Die allgemeine Polynomgleichung	423
3.5.12	Gleichungen fünften Grades und das Ikosaeder	424
3.5.13	Darstellung von Einheitswurzeln	427
3.5.14	Beispiele	429
3.5.15	Das Umkehrproblem der Galois-Theorie	434
3.6	Geometrische Konstruktionen	437
3.6.1	Konstruktionen mit Zirkel und Lineal	438
3.6.2	Der Körper der konstruierbaren Punkte	439
3.6.3	Struktur des Körpers der konstruierbaren Punkte	441
3.6.4	Unlösbarkeit klassischer Konstruktionsaufgaben	444
3.6.5	Konstruktion von regelmäßigen n -Ecken*	446
3.6.6	Andere Regeln für Konstruktionsverfahren*	451
Anhang 1 Platonische Körper		453
Anhang 2 Begriffe und Axiome		459
Literaturverzeichnis		481
Index		487
Symbolverzeichnis		493