

Inhaltsverzeichnis

1	Erforderliche mathematische Grundlagen	1
1.1	Matrizen	1
1.1.1	Rechenoperationen mit Matrizen	1
1.1.2	Determinante	2
1.1.3	Inverse Matrix	2
1.2	Differenzialgleichungen	2
1.2.1	Definitionen	3
1.2.2	Partielle Differenzialgleichungen	4
1.2.3	Partielle Integration	5
1.2.4	Klassifikation von Differenzialgleichungen	6
1.2.5	Anfangswertaufgabe	7
1.2.6	Randwertaufgabe	7
1.2.7	Innernes Produkt	9
1.2.8	Starke Form/Formulierung einer Differenzialgleichung	11
1.2.9	Schwache Form/Formulierung einer Differenzialgleichung	11
1.3	Vektoroperatoren	11
1.3.1	Nabla- und Laplaceoperator	12
1.3.2	Vektoroperator Gradient	12
1.3.3	Vektoroperator Divergenz	13
1.3.4	Vektoroperator Rotation	13
1.3.5	Gegenüberstellung der Vektoroperatoren	13
1.3.6	Nützliche Normen	14
2	Differenzialgleichungen und Finite Elemente	16
2.1	Physik-Beispiele für Differenzialgleichungen erster Ordnung	16

2.2	Physik-Beispiele für Differenzialgleichungen	
	zweiter Ordnung	17
2.3	Finite Elemente	19
3	Von der Momentenmethode zur Galerkin-Methode	21
3.1	Grundprinzip der Momentenmethode	21
3.2	Anmerkungen zur Momentenmethode	23
3.2.1	Matrix $[l_{mn}]$	23
3.2.2	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktionen f_n und w_n	23
3.3	Galerkins Idee	24
3.4	Traditionelle Galerkin-Methode	24
3.5	Galerkin-FEM-Methode	26
3.6	Vorgehen zur Lösung mit der Galerkin-Methode	27
4	Lösung der Gleichung $\frac{dy}{dx} - y = 0$ mit der Galerkin-Methode	29
4.1	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	29
4.2	Formulierung der schwachen Form mit Basis- und Wichtungsfunktion	30
4.3	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrizengleichung	31
4.4	Lösung des linearen Gleichungssystems	31
5	Lösung der Gleichung $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ mit der Galerkin-Methode	33
5.1	Lösung mit linearer Basis- und Wichtungsfunktion	33
5.1.1	Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	34
5.1.2	Diskretisierung des zu lösenden Gebiets Ω	35
5.1.3	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	36
5.1.4	Formulierung der schwache Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$	37
5.1.5	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrizengleichung	38
5.1.6	Lösung des linearen Gleichungssystems	41
5.2	Lösung mit nichtlinearer Basis- und Wichtungsfunktion	44
5.2.1	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	44
5.2.2	Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	45
5.2.3	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrizengleichung	45
5.2.4	Lösung des linearen Gleichungssystems	45
6	Lösung der Gleichung $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ mit der Galerkin-Methode	47
6.1	Lösung mit linearer Basis- und Wichtungsfunktion	48

6.1.1	Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	49
6.1.2	Diskretisierung des zu lösenden Gebiets Ω	49
6.1.3	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	49
6.1.4	Formulierung der schwachen Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$	50
6.1.5	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrizengleichung	50
6.1.6	Lösung des linearen Gleichungssystems	50
6.2	Lösung mit nichtlinearer Basis- und Wichtungsfunktion	51
6.2.1	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	52
6.2.2	Formulierung der schwachen Form mit Basis- und Wichtungsfunktion	52
6.2.3	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrizengleichung	53
6.2.4	Lösung des linearen Gleichungssystems	54
7	Lösung physik. Bsp. DGL 1'ter Ordnung mit Galerkin-Methode	56
7.1	Durchflutungsgesetz gelöst mit nichtlinearer Basis- und Wichtungsfunktion	56
7.1.1	Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	57
7.1.2	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrizengleichung	59
7.1.3	Lösung des linearen Gleichungssystems	59
7.2	Gegenüberstellung FEM- mit Galerkin-Ergebnis	60
8	Lösung physik. Bsp. DGL 2'ter Ordnung mit Galerkin-Methode	63
8.1	Elektrostatische Feldberechnung	63
8.1.1	Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	63
8.1.2	Diskretisierung des zu lösenden Gebiets Ω	64
8.1.3	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	64
8.1.4	Formulierung der schwachen Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$	64
8.1.5	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrizengleichung	66
8.1.6	Lösung des linearen Gleichungssystems	68
8.2	Ortsabhängige Temperaturberechnung	70
8.2.1	Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	71
8.2.2	Diskretisierung des zu lösenden Gebiets Ω	72
8.2.3	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	72
8.2.4	Formulierung der schwachen Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$	72
8.2.5	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrizengleichung	73
8.2.6	Lösung des linearen Gleichungssystems	75

8.2.7	Diffusionsvorgang vollendet	78
8.3	Ortsabhängige Magnetfeldberechnung	79
8.3.1	Schwache Formulierung der Differenzialgleichung	80
8.3.2	Diskretisierung des zu lösenden Gebiets Ω	80
8.3.3	Wahl der Basis- und Wichtungsfunktion	81
8.3.4	Formulierung der schwachen Form mit Dreiecksfunktionen $\phi(x)$	81
8.3.5	Überführung des Gleichungssystems in eine Matrizengleichung	81
8.3.6	Lösung des linearen Gleichungssystems	83
9	Einführung in die Finite-Differenzen-Methode	88
9.1	Numerische Notation der linearen Felddiffusionsgleichung	88
9.2	Lösung mit impliziter Methode nach Crank-Nicolson	89
9.2.1	Überführung der Diffusionsgleichung in eine Matrizengleichung	89
9.2.2	Lösung der Matrizengleichung	91
9.2.3	Anwendungsbeispiel	94
9.3	Lösung mit expliziter Methode	96
9.3.1	Überführung der Diffusionsgleichung in eine Matrizengleichung	97
9.3.2	Lösung der Matrizengleichung	98
9.3.3	Anwendungsbeispiel	99
10	Anwendungen der FEM zur Produktentwicklung	104
10.1	Analyse eines Proportionalmagnetaktors	104
10.1.1	Preprocessing	105
10.1.2	Processing	106
10.1.3	Postprocessing	107
10.2	Synthese eines planaren Asynchron-Scheibenläufermotors	108
10.2.1	Preprocessing	108
10.2.2	Processing	108
10.2.3	Postprocessing	109
10.2.4	Musterbau des planaren Asynchronmotors	109
11	Anwendung der FEM zur Produktoptimierung	111
A		114
A.1	MATLAB-Code – Wärmediffusionsskript	114
A.2	MATLAB-Code – Magnetfelddiffusionsskript	118

A.3 MATLAB-Ergebnisse vs. COMSOL Multiphysics-Ergebnisse	124
Literaturverzeichnis	127