

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1	Mathematische Grundlagen . . . . .	1
1.1.1	Ausdrücke aus der Vektoralgebra . . . . .	1
1.1.2	Differentialoperatoren . . . . .	2
1.1.2.1	Gradient . . . . .	3
1.1.2.2	Divergenz . . . . .	3
1.1.2.3	Rotation . . . . .	3
1.1.3	Linearität der Differentialoperatoren . . . . .	4
1.1.4	Mehrfache Anwendung von Differentialoperatoren . . . . .	4
1.1.5	Transformation von Differentialoperatoren . . . . .	7
1.1.5.1	Gradient in Kugelkoordinaten . . . . .	10
1.1.5.2	Divergenz in Kugelkoordinaten . . . . .	13
1.1.5.3	Rotation in Kugelkoordinaten . . . . .	15
1.1.5.4	Laplaceoperator in Kugelkoordinaten . . . . .	16
1.1.5.5	Gefahren bei der Anwendung des Nablaoperators . . . . .	16
1.1.6	Integrale . . . . .	18
1.1.6.1	Kurvenintegrale . . . . .	19
1.1.6.2	Umlaufintegrale . . . . .	20
1.1.6.3	Flächenintegrale . . . . .	21
1.1.6.4	Raumintegrale . . . . .	23
1.1.7	Integralsätze . . . . .	25
1.1.7.1	Gauß'scher Integralsatz . . . . .	25
1.1.7.2	Stokes'scher Integralsatz . . . . .	25
1.1.7.3	Erste Green'sche Integralformel . . . . .	26
1.1.7.4	Zweite Green'sche Integralformel . . . . .	28
1.1.8	Distributionen . . . . .	28
1.1.9	Separationsansätze . . . . .	33
1.2	Feldtheoretische Grundlagen . . . . .	35
1.2.1	Differentialform der Maxwellgleichungen . . . . .	35
1.2.2	Integralform der Maxwellgleichungen . . . . .	38
1.2.3	Spannung und Strom . . . . .	40
1.2.4	Stetigkeitsbedingungen . . . . .	41
1.2.4.1	Stetigkeit der elektrischen Feldstärke . . . . .	41
1.2.4.2	Stetigkeit der elektrischen Verschiebungsdichte . . . . .	43
1.2.4.3	Stetigkeit der magnetischen Erregung . . . . .	45

1.2.4.4	Stetigkeit der magnetischen Flussdichte . . . . .	45
1.2.4.5	Stetigkeit der Stromdichte . . . . .	46
1.2.4.6	Stetigkeitsbedingungen in vektorieller Form . . . . .	46
1.2.5	Elektrisch und magnetisch ideal leitende Wände . . . . .	47
1.2.5.1	Elektrisch ideal leitende Wände . . . . .	47
1.2.5.2	Magnetisch ideal leitende Wände . . . . .	48
1.2.6	Komplexe Form der Maxwellgleichungen . . . . .	48
1.2.7	Energie . . . . .	49
1.2.8	Mechanische Einflüsse elektromagnetischer Felder . . . . .	52
1.3	Lösungsmethoden und Vertiefung der Grundlagen . . . . .	53
1.3.1	Potentialansätze . . . . .	53
1.3.1.1	Elektrostatik . . . . .	53
1.3.1.2	Stationäres Strömungsfeld . . . . .	60
1.3.1.3	Magnetostatik . . . . .	61
1.3.1.4	Wellengleichung . . . . .	64
1.3.2	Skineffekt . . . . .	74
1.3.3	Raumladungsdichte in metallischen Leitern . . . . .	75
1.3.4	Verallgemeinerung ideal leitender Wände . . . . .	75
1.3.4.1	Harmonisch zeitveränderliche Felder . . . . .	76
1.3.4.2	Statische Felder . . . . .	76
1.3.4.3	Leiteroberflächen im stationären Strömungsfeld . . . . .	77
1.3.5	Längshomogene Wellenleiter . . . . .	78
1.3.6	Power-Loss-Methode . . . . .	82
1.3.7	Bezüge zur Optik . . . . .	86
1.3.8	Elektrostatisches Potential für eine beliebige Ladungsverteilung . . . . .	89
1.3.8.1	Symmetriebetrachtung bei der Punktladung . . . . .	89
1.3.8.2	Feld einer Punktladung . . . . .	90
1.3.8.3	Potential einer Punktladung . . . . .	91
1.3.8.4	Potential einer beliebigen Ladungsverteilung . . . . .	92
1.3.8.5	Delta-Distribution und Fundamentallösung der Poissons-Gleichung . . . . .	93
1.3.9	Lösung der Wellengleichung . . . . .	95
1.3.9.1	Eindimensionale homogene Wellengleichung . . . . .	96
1.3.9.2	Dreidimensionale homogene Wellengleichung . . . . .	96
1.3.9.3	Dreidimensionale inhomogene Wellengleichung . . . . .	97
1.3.10	Green'sche Funktionen . . . . .	101
1.3.10.1	Dreidimensionaler Fall . . . . .	101
1.3.10.2	Zweidimensionaler Fall . . . . .	103
1.3.10.3	Beispiel . . . . .	105
1.3.10.4	Magnetischer Multipol . . . . .	109
1.3.11	Inverser Operatoren . . . . .	113
1.3.11.1	Inverser Laplaceoperator . . . . .	114
1.3.11.2	Inverser Operator für die Divergenz . . . . .	116
1.3.11.3	Inverser Operator für den Gradienten . . . . .	117
1.3.11.4	Inverser Operator für die Rotation . . . . .	117
1.3.12	Ohm'scher Widerstand, Kapazität und Induktivität . . . . .	118
1.3.12.1	Kapazität . . . . .	118

1.3.12.2 Ohm'scher Widerstand . . . . .	120
1.3.12.3 Induktivität . . . . .	121
1.3.13 Definition von ohmschem Widerstand, Kapazität und Induktivität mit Hilfe der Energie . . . . .	123
1.3.13.1 Kapazität . . . . .	125
1.3.13.2 Ohm'scher Widerstand . . . . .	127
1.3.13.3 Induktivität . . . . .	128
1.3.14 Kapazitätsbelag, Induktivitätsbelag und Widerstandsbelag . . . . .	131
1.3.15 Energieausdrücke für komplexe Amplituden . . . . .	133
1.3.16 Anwendungsbeispiel: Bandleitung . . . . .	133
1.3.16.1 Potentialansatz . . . . .	133
1.3.16.2 Stromverteilung für hohe Frequenzen . . . . .	137
1.3.16.3 Bezug zur Power-Loss-Methode . . . . .	139
<b>2 Koordinatentransformationen und Wellenleiter</b>	<b>141</b>
2.1 Wahl des Koordinatensystems . . . . .	141
2.1.1 Kartesische Koordinaten . . . . .	142
2.1.2 Kugelkoordinaten . . . . .	144
2.1.3 Vergleich der Koordinatensysteme . . . . .	145
2.2 Anwendungsbeispiel . . . . .	145
2.2.1 Berechnung des Potentials . . . . .	145
2.2.2 Widerstandsberechnung . . . . .	151
2.3 Konforme Abbildungen . . . . .	153
2.3.1 Eigenschaften . . . . .	154
2.3.2 Laplaceoperator und Laplacegleichung . . . . .	155
2.3.3 Elektrisches Feld . . . . .	156
2.3.4 Anwendungsbeispiel . . . . .	158
2.3.4.1 Berechnung des Potentials . . . . .	160
2.3.4.2 Berechnung der elektrischen Feldstärke . . . . .	160
2.3.5 Stromstärke, Spannung und Widerstand . . . . .	162
2.3.6 Anwendungsbeispiel . . . . .	166
2.3.7 Schwarz-Christoffel-Transformation . . . . .	167
2.3.7.1 Transformationsvorschrift . . . . .	167
2.3.7.2 Anwendungsbeispiel: Koplanare Zweibandleitung . . . . .	170
2.4 Dualität zwischen magnetischem und elektrischem Feld . . . . .	176
2.5 Leitungstheorie . . . . .	185
2.5.1 Feldtheoretische Basis der Leitungstheorie . . . . .	188
2.5.2 Wellenwiderstände gebräuchlicher Leitungen . . . . .	191
2.5.2.1 Zweidrahtleitung . . . . .	192
2.5.2.2 Koaxialkabel . . . . .	194
2.5.2.3 Bandleitung und koplanare Leitungen . . . . .	195
2.5.3 Dämpfung der Bandleitung . . . . .	196
2.5.3.1 Näherung für hohe Frequenzen . . . . .	197
2.5.3.2 Näherung für niedrige Frequenzen . . . . .	197

<b>3 Tensoranalysis</b>	<b>199</b>
3.1 Vektoren . . . . .	199
3.2 Auswirkungen der Summationskonvention . . . . .	202
3.3 Gradient . . . . .	203
3.4 Weitere Abkürzungen . . . . .	208
3.5 Anwendungsbeispiele . . . . .	213
3.5.1 Elektrisches Feld . . . . .	213
3.5.2 Gradient in Kugelkoordinaten . . . . .	215
3.5.3 Gradient in Zylinderkoordinaten . . . . .	218
3.6 Differentiationsregeln . . . . .	218
3.6.1 Produktregel . . . . .	219
3.6.2 Kettenregel . . . . .	220
3.7 Divergenz . . . . .	221
3.7.1 Christoffelsymbol . . . . .	223
3.7.2 Praktische Berechnung der Christoffelsymbole . . . . .	226
3.7.3 Divergenz in Kugelkoordinaten . . . . .	227
3.7.4 Divergenz in Zylinderkoordinaten . . . . .	229
3.8 Rotation . . . . .	230
3.8.1 Rotation in Kugelkoordinaten . . . . .	232
3.8.2 Rotation in Zylinderkoordinaten . . . . .	233
3.9 Vereinfachte Berechnung der Divergenz . . . . .	234
3.10 Laplaceoperator . . . . .	236
3.10.1 Laplaceoperator in Kugelkoordinaten . . . . .	236
3.10.2 Laplaceoperator in Zylinderkoordinaten . . . . .	237
3.11 Raumintegrale . . . . .	237
3.12 Transformationseigenschaften . . . . .	238
3.12.1 Transformation der Basisvektoren . . . . .	239
3.12.2 Transformation der Komponenten eines Vektors . . . . .	241
3.12.3 Transformation der Metrikoeffizienten . . . . .	242
3.13 Kovariante Ableitung von Vektorkomponenten . . . . .	244
3.14 Kovariante Ableitung eines Skalars . . . . .	246
3.15 Transformationsverhalten . . . . .	248
3.15.1 Transformationsverhalten des Christoffelsymbols . . . . .	248
3.15.2 Transformationsverhalten der partiellen Ableitung . . . . .	249
3.15.3 Transformationsverhalten der kovarianten Ableitung . . . . .	250
3.16 Gradient mit Hilfe der kovarianten Ableitung . . . . .	251
3.17 Divergenz mit Hilfe der kovarianten Ableitung . . . . .	252
3.18 Rotation mit Hilfe der kovarianten Ableitung . . . . .	253
3.19 Invarianz . . . . .	255
3.20 Invariante Darstellung von Produkten . . . . .	256
3.20.1 Skalarprodukt . . . . .	256
3.20.2 Vektorprodukt . . . . .	257
3.21 Definition von Tensorkomponenten . . . . .	259
3.21.1 Heben und Senken von Indizes . . . . .	263
3.21.2 Äquivalenz von Hin- und Rücktransformation . . . . .	264
3.21.3 Heben und Senken von Indizes bei Transformationen . . . . .	264

3.22	Tensoren nullter Stufe	267
3.23	Spezielle Tensoren	268
3.23.1	Metriktensor	269
3.23.2	$e^{ikl}$ als Tensor dritter Stufe	270
3.23.3	Gradient als Tensor erster Stufe	270
3.23.4	Divergenz als Tensor nullter Stufe	272
3.23.5	Rotation als Tensor erster Stufe	273
3.24	Tensorgleichungen	274
3.24.1	Invarianz von Tensorgleichungen	275
3.24.2	Heben und Senken von Indizes in Tensorgleichungen	277
3.25	Kovariante Ableitung von Tensoren zweiter Stufe	279
3.26	Kovariante Ableitung des Metriktensors	283
3.27	Kovariante Ableitung von Tensoren höherer Stufe	283
3.28	Produktregeln für kovariante Ableitungen	285
3.29	Ableitung des vollständig antisymmetrischen Tensors	288
3.30	Tensorielles Produkt	290
3.31	Verjüngendes Produkt	296
3.32	Tensorgleichungen	298
3.33	Nablaoperator	300
3.33.1	Divergenz mit Hilfe des Nablaoperators	300
3.33.2	Gradient mit Hilfe des Nablaoperators	301
3.33.3	Rotation mit Hilfe des Nablaoperators	301
3.33.4	Besonderheiten des Nablaoperators	302
3.34	Anwendung des Nablaoperators auf Tensoren	303
3.34.1	Divergenz von Tensoren zweiter und höherer Stufe	303
3.34.2	Gradient von Tensoren erster und höherer Stufe	304
3.34.3	Rotation von Tensoren höherer Stufe	305
3.35	Mehrfache Anwendung von Differentialoperatoren	305
3.35.1	Der Operator $\text{grad div}$	305
3.35.2	Der Operator $\text{Div Grad}$	307
3.35.3	Der Operator $\text{rot rot}$	308
3.36	Anwendung von Differentialoperatoren auf Produkte	310
3.36.1	Rotation eines Vektorproduktes	310
3.36.2	Divergenz eines Vektorproduktes	312
3.36.3	Gradient eines Skalarproduktes	313
3.37	Orthogonale Transformation	315
3.38	Drehmatrix	319
3.39	Orthogonale Matrix	321
3.40	Abweichendes Transformationsverhalten	323
3.41	Mathematischer Ausblick	325
<b>4</b>	<b>Lorentztransformation und Relativitätstheorie</b>	<b>329</b>
4.1	Spezielle Lorentztransformation	331
4.2	Drehungen und Verschiebungen	336
4.3	Zeitdilatation	339
4.4	Längenkontraktion	341

4.5	Dopplereffekt . . . . .	342
4.5.1	Spezialfall . . . . .	342
4.5.2	Allgemeiner Fall . . . . .	345
4.6	Transformation der Geschwindigkeit . . . . .	350
4.7	Transformation der Beschleunigung . . . . .	353
4.8	Vierdimensionale Form der Maxwell'schen Gleichungen . . . . .	354
4.8.1	Maxwellgleichungen für das Vektorpotential und das skalare Potential . . . . .	355
4.8.2	Maxwellgleichungen für das elektrische und das magnetische Feld . . . . .	358
4.9	Transformation des elektromagnetischen Feldes . . . . .	363
4.10	Rücktransformation . . . . .	367
4.11	Transformation von Ladung und Stromdichte . . . . .	369
4.12	Beispiel Plattenkondensator/Bandleitung . . . . .	372
4.13	Dielektrische und permeable Medien . . . . .	375
4.14	Gleichförmig bewegte Ladung . . . . .	378
4.15	Gesetz von Biot-Savart . . . . .	381
4.15.1	Herleitung . . . . .	381
4.15.2	Anwendungsbeispiel: Regelmäßiges n-Eck als Leiterschleife . . . . .	387
4.15.3	Vergleich mit bewegter Ladung . . . . .	391
4.16	Induktionsgesetz für bewegte Körper . . . . .	395
4.16.1	Leiterschleife im Magnetfeld . . . . .	396
4.16.2	Unipolare Induktion . . . . .	398
4.17	Induktion bei Materie-abhängiger Geschwindigkeit . . . . .	401
4.17.1	Leiterschleife im Magnetfeld . . . . .	402
4.17.2	Unipolare Induktion . . . . .	403
4.18	Magnetischer Fluss und Induktion . . . . .	404
4.18.1	In z-Richtung bewegte, rechteckige Integrationsfläche . . . . .	404
4.18.2	Gleichförmig bewegte Integrationsfläche beliebiger Form . . . . .	406
4.18.3	Zeitveränderliche Integrationsfläche . . . . .	410
4.18.3.1	Leiterschleife im Magnetfeld . . . . .	414
4.18.3.2	Unipolare Induktion . . . . .	415
4.18.3.3	Anwendungsbeispiel . . . . .	415
4.18.4	Fazit . . . . .	417
4.19	Bewegte Körper . . . . .	418
4.20	Kraft und bewegte Masse . . . . .	420
4.20.1	Beispiel . . . . .	421
4.20.2	Transformationsgesetz für die Kraft . . . . .	426
4.20.3	Transformationsgesetz für den Impuls . . . . .	429
4.20.4	Vierervektor des Ortes . . . . .	431
4.20.5	Vierervektor der Geschwindigkeit, Eigenzeit . . . . .	433
4.20.6	Viererimpuls . . . . .	439
4.20.7	Äquivalenz von Masse und Energie . . . . .	443
4.20.8	Viererbeschleunigung und Viererkraft . . . . .	444
4.20.9	Lorentzkraft und Viererkraft . . . . .	446
4.20.10	Lorentz-Faktoren . . . . .	448
4.21	Vierdimensionale Potentialtheorie . . . . .	450
4.21.1	Lösung der Wellengleichung . . . . .	450

4.21.2	Raumintegral über die Viererstromdichte einer Punktladung . . . . .	451
4.21.3	Vierdimensionales Potential einer bewegten Punktladung . . . . .	453
4.21.3.1	Magnetisches Feld . . . . .	461
4.21.3.2	Elektrisches Feld . . . . .	463
4.21.4	Schwingende Punktladungen und Hertz'sche Dipole . . . . .	464
4.21.4.1	Schwingende Punktladung in Kugelkoordinaten . . . . .	465
4.21.4.2	Verschiebung des Koordinatensystems . . . . .	467
4.21.4.3	Elektrisches Feld . . . . .	473
4.21.4.4	Magnetisches Feld . . . . .	477
4.21.4.5	Vergleich mit dem Hertz'schen Dipol . . . . .	478
4.21.5	Strahlungsverluste . . . . .	478
4.21.5.1	Larmor'sche Formel . . . . .	479
4.21.5.2	Liénard'sche Formel . . . . .	481
4.21.5.3	Bewegungsgleichung . . . . .	486
4.21.5.4	Transformation vom Ruhesystem zum bewegten Bezugssystem . . . . .	487
4.21.6	Lösung der vierdimensionalen Poissons-Gleichung . . . . .	488
4.21.6.1	Skalares Potential . . . . .	488
4.21.6.2	Vektorpotential . . . . .	491
4.21.6.3	Anwendung auf die Maxwell-Gleichungen . . . . .	491
4.21.6.4	Anwendung des Residuensatzes . . . . .	492
4.22	Ausblick . . . . .	496
<b>5</b>	<b>Paradoxa</b>	<b>499</b>
5.1	Definition der imaginären Einheit . . . . .	500
5.2	Hering'sches Experiment . . . . .	502
5.2.1	Geschwindigkeit als Konstante . . . . .	505
5.2.2	Geschwindigkeit als Eigenschaft des Raumpunktes . . . . .	507
5.3	Uhrenparadoxon . . . . .	508
5.3.1	Erste Hypothese . . . . .	509
5.3.2	Schlagartige Richtungsumkehr . . . . .	511
5.3.3	Zweite Hypothese . . . . .	512
5.3.4	Fazit . . . . .	512
<b>6</b>	<b>Anhang</b>	<b>513</b>
6.1	Tangentenvektor und Basisvektoren . . . . .	513
6.2	Spatprodukt dreier Vektoren . . . . .	515
6.3	Flächenintegrale . . . . .	515
6.4	Kontinuitätsgleichung . . . . .	519
6.5	Differentiation von Parameterintegralen . . . . .	521
6.6	Quellen und Wirbel . . . . .	523
6.7	Konzentrierte Bauelemente in der Feldtheorie . . . . .	525
6.7.1	Energie, Spannung und Ladung im elektrostatischen Feld . . . . .	525
6.7.2	Verlustleistung im stationären Strömungsfeld . . . . .	527
6.7.3	Energie, magnetischer Fluss und Strom in der Magnetostatik . . . . .	528
6.8	Umkehrfunktion einer analytischen Funktion . . . . .	529
6.9	Transformation der Basisvektoren . . . . .	531

6.10	Verschiedene konforme Abbildungen	533
6.10.1	Potenzfunktion	533
6.10.2	Summe zweier analytischer Funktionen	535
6.10.3	Produkt zweier analytischer Funktionen	536
6.10.4	Verkettung zweier analytischer Funktionen	537
6.10.5	Polynome und rationale Funktionen	538
6.11	Elliptische Integrale; Schwarz-Christoffel-Transformation	539
6.12	Leitungsparameter	543
6.13	Summationskonvention	547
6.14	Vollständig antisymmetrischer Tensor und Metriktensor	548
6.15	Kovariante Ableitung als Tensor	552
6.15.1	Heben und Senken von Indizes bei der kovarianten Ableitung	552
6.15.2	Transformationsverhalten der kovarianten Ableitung	554
6.15.3	Vertauschen der Differentiationsreihenfolge	558
6.16	Divergenz als Tensor	560
6.17	Gradient als Tensor	561
6.18	Invarianz des Abstandes bei orthogonaler Transformation	563
6.19	Ableitung von Determinanten	564
6.20	Vollst. antisymmetrischer Tensor im $n$ -dimensionalen Raum	566
6.21	Christoffelsymbole und Determinante des Metrikensors	571
6.22	Duale Tensoren	573
6.23	Banach'scher Fixpunktsatz	577
6.24	Vierdimensionale Kugeln	579
6.25	Mehrdimensionale Kugeln	584
7	Lösung der Übungsaufgaben	589
8	Literatur und Tabellen	691