

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	1
1.1 Mathematische Grundlagen	1
1.1.1 Ausdrücke aus der Vektoralgebra	1
1.1.2 Differentialoperatoren	2
1.1.2.1 Gradient	3
1.1.2.2 Divergenz	3
1.1.2.3 Rotation	3
1.1.3 Linearität der Differentialoperatoren	4
1.1.4 Mehrfache Anwendung von Differentialoperatoren	4
1.1.5 Transformation von Differentialoperatoren	7
1.1.5.1 Gradient in Kugelkoordinaten	10
1.1.5.2 Divergenz in Kugelkoordinaten	13
1.1.5.3 Rotation in Kugelkoordinaten	15
1.1.5.4 Laplaceoperator in Kugelkoordinaten	16
1.1.5.5 Gefahren bei der Anwendung des Nablaoperators	16
1.1.6 Integrale	18
1.1.6.1 Kurvenintegrale	19
1.1.6.2 Umlaufintegrale	20
1.1.6.3 Flächenintegrale	21
1.1.6.4 Raumintegrale	23
1.1.7 Integralsätze	25
1.1.7.1 Gauß'scher Integralsatz	25
1.1.7.2 Stokes'scher Integralsatz	25
1.1.7.3 Erste Green'sche Integralformel	26
1.1.7.4 Zweite Green'sche Integralformel	28
1.1.8 Distributionen	28
1.1.9 Separationsansätze	33
1.2 Feldtheoretische Grundlagen	35
1.2.1 Differentialform der Maxwellgleichungen	35
1.2.2 Integralform der Maxwellgleichungen	38
1.2.3 Spannung und Strom	40
1.2.4 Stetigkeitsbedingungen	41
1.2.4.1 Stetigkeit der elektrischen Feldstärke	41
1.2.4.2 Stetigkeit der elektrischen Verschiebungsdichte	43
1.2.4.3 Stetigkeit der magnetischen Erregung	45

1.2.4.4	Stetigkeit der magnetischen Flussdichte	45
1.2.4.5	Stetigkeit der Stromdichte	46
1.2.4.6	Stetigkeitsbedingungen in vektorieller Form	46
1.2.5	Elektrisch und magnetisch ideal leitende Wände	47
1.2.5.1	Elektrisch ideal leitende Wände	47
1.2.5.2	Magnetisch ideal leitende Wände	48
1.2.6	Komplexe Form der Maxwellgleichungen	48
1.2.7	Energie	49
1.2.8	Mechanische Einflüsse elektromagnetischer Felder	52
1.3	Lösungsmethoden und Vertiefung der Grundlagen	53
1.3.1	Potentialansätze	53
1.3.1.1	Elektrostatik	53
1.3.1.2	Stationäres Strömungsfeld	60
1.3.1.3	Magnetostatik	61
1.3.1.4	Wellengleichung	64
1.3.2	Skineffekt	74
1.3.3	Raumladungsdichte in metallischen Leitern	75
1.3.4	Verallgemeinerung ideal leitender Wände	75
1.3.4.1	Harmonisch zeitveränderliche Felder	76
1.3.4.2	Statische Felder	76
1.3.4.3	Leiteroberflächen im stationären Strömungsfeld	77
1.3.5	Längshomogene Wellenleiter	78
1.3.6	Power-Loss-Methode	82
1.3.7	Bezüge zur Optik	86
1.3.8	Elektrostatistisches Potential für eine beliebige Ladungsverteilung	89
1.3.8.1	Symmetriebetrachtung bei der Punktladung	89
1.3.8.2	Feld einer Punktladung	90
1.3.8.3	Potential einer Punktladung	91
1.3.8.4	Potential einer beliebigen Ladungsverteilung	92
1.3.8.5	Delta-Distribution und Fundamentallösung der Poissonsgleichung	93
1.3.9	Lösung der Wellengleichung	95
1.3.9.1	Eindimensionale homogene Wellengleichung	96
1.3.9.2	Dreidimensionale homogene Wellengleichung	96
1.3.9.3	Dreidimensionale inhomogene Wellengleichung	97
1.3.10	Green'sche Funktionen	101
1.3.10.1	Dreidimensionaler Fall	101
1.3.10.2	Zweidimensionaler Fall	103
1.3.10.3	Beispiel	105
1.3.10.4	Magnetischer Multipol	109
1.3.11	Inverse Operatoren	113
1.3.11.1	Inverser Laplaceoperator	114
1.3.11.2	Inverser Operator für die Divergenz	116
1.3.11.3	Inverser Operator für den Gradienten	117
1.3.11.4	Inverser Operator für die Rotation	117
1.3.12	Ohm'scher Widerstand, Kapazität und Induktivität	118
1.3.12.1	Kapazität	118

1.3.12.2	Ohm'scher Widerstand	120
1.3.12.3	Induktivität	121
1.3.13	Definition von ohmschem Widerstand, Kapazität und Induktivität mit Hilfe der Energie	123
1.3.13.1	Kapazität	125
1.3.13.2	Ohm'scher Widerstand	127
1.3.13.3	Induktivität	128
1.3.14	Kapazitätsbelag, Induktivitätsbelag und Widerstandsbelag	131
1.3.15	Energieausdrücke für komplexe Amplituden	133
1.3.16	Anwendungsbeispiel: Bandleitung	133
1.3.16.1	Potentialansatz	133
1.3.16.2	Stromverteilung für hohe Frequenzen	137
1.3.16.3	Bezug zur Power-Loss-Methode	139
2	Koordinatentransformationen und Wellenleiter	141
2.1	Wahl des Koordinatensystems	141
2.1.1	Kartesische Koordinaten	142
2.1.2	Kugelkoordinaten	144
2.1.3	Vergleich der Koordinatensysteme	145
2.2	Anwendungsbeispiel	145
2.2.1	Berechnung des Potentials	145
2.2.2	Widerstandsberechnung	151
2.3	Konforme Abbildungen	153
2.3.1	Eigenschaften	154
2.3.2	Laplaceoperator und Laplacegleichung	155
2.3.3	Elektrisches Feld	156
2.3.4	Anwendungsbeispiel	158
2.3.4.1	Berechnung des Potentials	160
2.3.4.2	Berechnung der elektrischen Feldstärke	160
2.3.5	Stromstärke, Spannung und Widerstand	162
2.3.6	Anwendungsbeispiel	166
2.3.7	Schwarz-Christoffel-Transformation	167
2.3.7.1	Transformationsvorschrift	167
2.3.7.2	Anwendungsbeispiel: Koplanare Zweibandleitung	170
2.4	Dualität zwischen magnetischem und elektrischem Feld	176
2.5	Leitungstheorie	185
2.5.1	Feldtheoretische Basis der Leitungstheorie	188
2.5.2	Wellenwiderstände gebräuchlicher Leitungen	191
2.5.2.1	Zweidrahtleitung	192
2.5.2.2	Koaxialkabel	194
2.5.2.3	Bandleitung und koplanare Leitungen	195
2.5.3	Dämpfung der Bandleitung	196
2.5.3.1	Näherung für hohe Frequenzen	197
2.5.3.2	Näherung für niedrige Frequenzen	197

3	Tensoranalysis	199
3.1	Vektoren	199
3.2	Auswirkungen der Summationskonvention	202
3.3	Gradient	203
3.4	Weitere Abkürzungen	208
3.5	Anwendungsbeispiele	213
3.5.1	Elektrisches Feld	213
3.5.2	Gradient in Kugelkoordinaten	215
3.5.3	Gradient in Zylinderkoordinaten	218
3.6	Differentiationsregeln	218
3.6.1	Produktregel	219
3.6.2	Kettenregel	220
3.7	Divergenz	221
3.7.1	Christoffelsymbol	223
3.7.2	Praktische Berechnung der Christoffelsymbole	226
3.7.3	Divergenz in Kugelkoordinaten	227
3.7.4	Divergenz in Zylinderkoordinaten	229
3.8	Rotation	230
3.8.1	Rotation in Kugelkoordinaten	232
3.8.2	Rotation in Zylinderkoordinaten	233
3.9	Vereinfachte Berechnung der Divergenz	234
3.10	Laplaceoperator	236
3.10.1	Laplaceoperator in Kugelkoordinaten	236
3.10.2	Laplaceoperator in Zylinderkoordinaten	237
3.11	Raumintegrale	237
3.12	Transformationseigenschaften	238
3.12.1	Transformation der Basisvektoren	239
3.12.2	Transformation der Komponenten eines Vektors	241
3.12.3	Transformation der Metrikoeffizienten	242
3.13	Kovariante Ableitung von Vektorkomponenten	244
3.14	Kovariante Ableitung eines Skalars	246
3.15	Transformationsverhalten	248
3.15.1	Transformationsverhalten des Christoffelsymbols	248
3.15.2	Transformationsverhalten der partiellen Ableitung	249
3.15.3	Transformationsverhalten der kovarianten Ableitung	250
3.16	Gradient mit Hilfe der kovarianten Ableitung	251
3.17	Divergenz mit Hilfe der kovarianten Ableitung	252
3.18	Rotation mit Hilfe der kovarianten Ableitung	253
3.19	Invarianz	255
3.20	Invariante Darstellung von Produkten	256
3.20.1	Skalarprodukt	256
3.20.2	Vektorprodukt	257
3.21	Definition von Tensorkomponenten	259
3.21.1	Heben und Senken von Indizes	263
3.21.2	Äquivalenz von Hin- und Rücktransformation	264
3.21.3	Heben und Senken von Indizes bei Transformationen	264

3.22	Tensoren nullter Stufe	267
3.23	Spezielle Tensoren	268
3.23.1	Metriktensor	269
3.23.2	e^{ikl} als Tensor dritter Stufe	270
3.23.3	Gradient als Tensor erster Stufe	270
3.23.4	Divergenz als Tensor nullter Stufe	272
3.23.5	Rotation als Tensor erster Stufe	273
3.24	Tensorgleichungen	274
3.24.1	Invarianz von Tensorgleichungen	275
3.24.2	Heben und Senken von Indizes in Tensorgleichungen	277
3.25	Kovariante Ableitung von Tensoren zweiter Stufe	279
3.26	Kovariante Ableitung des Metrikensors	283
3.27	Kovariante Ableitung von Tensoren höherer Stufe	283
3.28	Produktregeln für kovariante Ableitungen	285
3.29	Ableitung des vollständig antisymmetrischen Tensors	288
3.30	Tensorielles Produkt	290
3.31	Verjüngendes Produkt	296
3.32	Tensorgleichungen	298
3.33	Nablaoperator	300
3.33.1	Divergenz mit Hilfe des Nablaoperators	300
3.33.2	Gradient mit Hilfe des Nablaoperators	301
3.33.3	Rotation mit Hilfe des Nablaoperators	301
3.33.4	Besonderheiten des Nablaoperators	302
3.34	Anwendung des Nablaoperators auf Tensoren	303
3.34.1	Divergenz von Tensoren zweiter und höherer Stufe	303
3.34.2	Gradient von Tensoren erster und höherer Stufe	304
3.34.3	Rotation von Tensoren höherer Stufe	305
3.35	Mehrfache Anwendung von Differentialoperatoren	305
3.35.1	Der Operator grad div	305
3.35.2	Der Operator Div Grad	307
3.35.3	Der Operator rot rot	308
3.36	Anwendung von Differentialoperatoren auf Produkte	310
3.36.1	Rotation eines Vektorproduktes	310
3.36.2	Divergenz eines Vektorproduktes	312
3.36.3	Gradient eines Skalarproduktes	313
3.37	Orthogonale Transformation	315
3.38	Drehmatrix	319
3.39	Orthogonale Matrix	321
3.40	Abweichendes Transformationsverhalten	323
3.41	Mathematischer Ausblick	325
4	Lorentztransformation und Relativitätstheorie	329
4.1	Spezielle Lorentztransformation	331
4.2	Drehungen und Verschiebungen	336
4.3	Zeitdilatation	339
4.4	Längenkontraktion	341

4.5	Dopplereffekt	342
4.5.1	Spezialfall	342
4.5.2	Allgemeiner Fall	345
4.6	Transformation der Geschwindigkeit	350
4.7	Transformation der Beschleunigung	353
4.8	Vierdimensionale Form der Maxwell'schen Gleichungen	354
4.8.1	Maxwellgleichungen für das Vektorpotential und das skalare Potential	355
4.8.2	Maxwellgleichungen für das elektrische und das magnetische Feld	358
4.9	Transformation des elektromagnetischen Feldes	363
4.10	Rücktransformation	367
4.11	Transformation von Ladung und Stromdichte	369
4.12	Beispiel Plattenkondensator/Bandleitung	372
4.13	Dielektrische und permeable Medien	375
4.14	Gleichförmig bewegte Ladung	378
4.15	Gesetz von Biot-Savart	381
4.15.1	Herleitung	381
4.15.2	Anwendungsbeispiel: Regelmäßiges n-Eck als Leiterschleife	387
4.15.3	Vergleich mit bewegter Ladung	391
4.16	Induktionsgesetz für bewegte Körper	395
4.16.1	Leiterschleife im Magnetfeld	396
4.16.2	Unipolare Induktion	398
4.17	Induktion bei Materie-abhängiger Geschwindigkeit	401
4.17.1	Leiterschleife im Magnetfeld	402
4.17.2	Unipolare Induktion	403
4.18	Magnetischer Fluss und Induktion	404
4.18.1	In z-Richtung bewegte, rechteckige Integrationsfläche	404
4.18.2	Gleichförmig bewegte Integrationsfläche beliebiger Form	406
4.18.3	Zeitveränderliche Integrationsfläche	410
4.18.3.1	Leiterschleife im Magnetfeld	414
4.18.3.2	Unipolare Induktion	415
4.18.3.3	Anwendungsbeispiel	415
4.18.4	Fazit	417
4.19	Bewegte Körper	418
4.20	Kraft und bewegte Masse	420
4.20.1	Beispiel	421
4.20.2	Transformationsgesetz für die Kraft	426
4.20.3	Transformationsgesetz für den Impuls	429
4.20.4	Vierervektor des Ortes	431
4.20.5	Vierervektor der Geschwindigkeit, Eigenzeit	433
4.20.6	Viererimpuls	439
4.20.7	Äquivalenz von Masse und Energie	443
4.20.8	Viererbeschleunigung und Viererkraft	444
4.20.9	Lorentzkraft und Viererkraft	446
4.20.10	Lorentz-Faktoren	448
4.21	Vierdimensionale Potentialtheorie	450
4.21.1	Lösung der Wellengleichung	450

4.21.2	Raumintegral über die Viererstromdichte einer Punktladung	451
4.21.3	Vierdimensionales Potential einer bewegten Punktladung	453
4.21.3.1	Magnetisches Feld	461
4.21.3.2	Elektrisches Feld	463
4.21.4	Schwingende Punktladungen und Hertz'sche Dipole	464
4.21.4.1	Schwingende Punktladung in Kugelkoordinaten	465
4.21.4.2	Verschiebung des Koordinatensystems	467
4.21.4.3	Elektrisches Feld	473
4.21.4.4	Magnetisches Feld	477
4.21.4.5	Vergleich mit dem Hertz'schen Dipol	478
4.21.5	Strahlungsverluste	478
4.21.5.1	Larmor'sche Formel	479
4.21.5.2	Liénard'sche Formel	481
4.21.5.3	Bewegungsgleichung	486
4.21.5.4	Transformation vom Ruhesystem zum bewegten Bezugssystem	487
4.21.6	Lösung der vierdimensionalen Poissongleichung	488
4.21.6.1	Skalares Potential	488
4.21.6.2	Vektorpotential	491
4.21.6.3	Anwendung auf die Maxwellgleichungen	491
4.21.6.4	Anwendung des Residuensatzes	492
4.22	Ausblick	496
5	Paradoxa	499
5.1	Definition der imaginären Einheit	500
5.2	Hering'sches Experiment	502
5.2.1	Geschwindigkeit als Konstante	505
5.2.2	Geschwindigkeit als Eigenschaft des Raumpunktes	507
5.3	Uhrenparadoxon	508
5.3.1	Erste Hypothese	509
5.3.2	Schlagartige Richtungsumkehr	511
5.3.3	Zweite Hypothese	512
5.3.4	Fazit	512
6	Anhang	513
6.1	Tangentenvektor und Basisvektoren	513
6.2	Spatprodukt dreier Vektoren	515
6.3	Flächenintegrale	515
6.4	Kontinuitätsgleichung	519
6.5	Differentiation von Parameterintegralen	521
6.6	Quellen und Wirbel	523
6.7	Konzentrierte Bauelemente in der Feldtheorie	525
6.7.1	Energie, Spannung und Ladung im elektrostatischen Feld	525
6.7.2	Verlustleistung im stationären Strömungsfeld	527
6.7.3	Energie, magnetischer Fluss und Strom in der Magnetostatik	528
6.8	Umkehrfunktion einer analytischen Funktion	529
6.9	Transformation der Basisvektoren	531

6.10	Verschiedene konforme Abbildungen	533
6.10.1	Potenzfunktion	533
6.10.2	Summe zweier analytischer Funktionen	535
6.10.3	Produkt zweier analytischer Funktionen	536
6.10.4	Verkettung zweier analytischer Funktionen	537
6.10.5	Polynome und rationale Funktionen	538
6.11	Elliptische Integrale; Schwarz-Christoffel-Transformation	539
6.12	Leitungsparameter	543
6.13	Summationskonvention	547
6.14	Vollständig antisymmetrischer Tensor und Metriktensor	548
6.15	Kovariante Ableitung als Tensor	552
6.15.1	Heben und Senken von Indizes bei der kovarianten Ableitung	552
6.15.2	Transformationsverhalten der kovarianten Ableitung	554
6.15.3	Vertauschen der Differentiationsreihenfolge	558
6.16	Divergenz als Tensor	560
6.17	Gradient als Tensor	561
6.18	Invarianz des Abstandes bei orthogonaler Transformation	563
6.19	Ableitung von Determinanten	564
6.20	Vollst. antisymmetrischer Tensor im n -dimensionalen Raum	566
6.21	Christoffelsymbole und Determinante des Metiktensors	571
6.22	Duale Tensoren	573
6.23	Banach'scher Fixpunktsatz	577
6.24	Vierdimensionale Kugeln	579
6.25	Mehrdimensionale Kugeln	584
7	Lösung der Übungsaufgaben	589
8	Literatur und Tabellen	691