

Inhaltsverzeichnis

I	Analysis 1	11
1	Grundlagen	13
1.1	Motivation	13
1.2	Grundlagen	14
1.2.1	Funktionen	14
1.2.2	Eigenschaften von Funktionen	15
1.2.3	Verkettete Funktionen	17
1.2.4	Reelle Funktionen	19
1.2.5	Eigenschaften reeller Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	20
1.2.6	Polynome	21
1.2.7	Gebrochen rationale Funktionen	26
1.2.8	Gleichungen und Ungleichungen	26
1.3	Komplexe Analysis	31
1.3.1	Rechenregeln für komplexe Zahlen in Polarkoordinaten	31
1.3.2	Eigenschaften von $z = e^{i\varphi}$	32
1.3.3	Radizieren (Wurzel ziehen) von komplexen Zahlen	32
1.3.4	Anwendung: Faktorisierung von Polynomen mit komplexen Koeffizienten	35
2	Folgen und Reihen	37
2.0.5	Rekursionen	38
2.0.6	Differenzenrekursion	41
2.0.7	Zusammenfassung	42
2.0.8	Summen (Reihen)	43
2.0.9	Rechenregeln für Summen	43
2.0.10	Wichtige Summen	44
2.0.11	Rechnen mit Summen	48
2.1	Binomialkoeffizienten und der binomische Lehrsatz	50
2.1.1	Der Binomialkoeffizient	50
2.1.2	Der binomische Lehrsatz	55
3	Konvergenz von Folgen, Reihen und Funktionen	57
3.1	Grundlagen über Mengen und die Sätze von Bolzano-Weierstrass	57

3.2	Konvergenz von Folgen	64
3.2.1	Monotonie	64
3.2.2	Konvergenz und Grenzwert einer Folge	65
3.2.3	Rechnen mit konvergenten Folgen	72
3.2.4	Rechenregeln für Grenzwerte	74
3.2.5	Konvergenz monotoner Folgen	78
3.2.6	Die eulersche Zahl	79
3.2.7	Konvergenz rekursiver Folgen	82
3.2.8	Konvergenz komplexer Folgen	86
3.2.9	Cauchy-Konvergenz	86
3.2.10	Zusammenfassung Folgen	88
3.3	Unendliche Reihen	89
3.3.1	Die unendliche geometrische Reihe	91
3.3.2	Cauchy Reihen	93
3.3.3	Teleskopsummen und Teleskopprodukte	96
3.3.4	Konvergenzkriterien für fast immer nicht negative Reihen	99
3.3.5	Alternierende Reihen	108
3.3.6	Zusammenfassung Konvergenzkriterien	111
3.3.7	Umordnung von Reihen	112
3.3.8	Das Cauchy-Produkt	113
3.4	Potenzreihen	115
3.4.1	Spezielle Potenzreihen	121
3.4.2	Die eulersche Zahl und die exponentielle Funktion	122
3.5	Grenzwerte von Funktionen	130
3.5.1	Stetigkeit	130
3.5.2	Das $\varepsilon - \delta$ -Kriterium	132
3.5.3	Stetigkeit verketteter Funktionen	135
3.5.4	Weitere Stetigkeitsuntersuchungen	136
3.5.5	Stetigkeit der Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$	139
3.5.6	Unstetigkeit	143
3.5.7	Stetigkeit auf Intervallen	146
3.5.8	Lipschitz-Stetigkeit	148
3.5.9	Der Zwischenwertsatz	151
3.5.10	Der Fixpunktsatz	152
3.5.11	Eigenschaften der Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$	156
3.5.12	Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$	162
3.5.13	Die Logarithmusfunktion	163
3.5.14	Die hyperbolischen Funktionen	164
4	Differentialrechnung	167
4.1	Motivation	167
4.2	Verallgemeinerung	171
4.2.1	Einige Grenzwerte von Sin, Cos, Exp	173
4.2.2	Berechnung elementarer Ableitungen	176
4.3	Die Tangentengleichung	179
4.4	Ableitungsregeln	180

4.5	Lokale Extrema	188
4.6	Der Mittelwertsatz	189
4.7	Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Potenzreihen	192
4.8	Monotonie	196
4.9	Die Grenzwertsätze von de L'Hospital	199
4.10	Krümmungseigenschaften	203
4.11	MacLaurin- und Taylorreihenentwicklung	204
4.12	Die Taylorreihe	209
4.12.1	Konvergenz der Taylorreihe	210
4.12.2	Beispiele	210
4.12.3	Anwendung der Potenzreihen	211
4.12.4	Konvergenzgeschwindigkeit von Taylorreihen	212
4.12.5	Zusammenhang zwischen Taylorreihen und Extremwerten	214
4.13	Numerische Berechnung von Ableitungen	216
4.14	Das Tangentenverfahren von Newton	218
5	Integration	223
5.1	Einleitung	223
5.1.1	Das unbestimmte Integral	231
5.1.2	Das bestimmte Integral	232
5.1.3	Die Flächenfunktion	233
5.1.4	Stammfunktion und Flächenfunktion	234
5.1.5	Die Stammfunktion von $1/x$	242
5.1.6	Partialbruchzerlegung	243
5.2	Flächenberechnungen	248
5.3	Fläche und Integral zwischen zwei Funktionen	249
5.4	Integration zur Berechnung von Flächen zwischen mehreren Funktionen	251
5.5	Die Mittelwertsätze der Integralrechnung	252
5.6	Das Restglied der Taylorreihe in Integraldarstellung	253
5.6.1	Das Restglied nach Lagrange	255
5.7	Längenberechnung	256
5.8	Mantelflächenberechnung	260
5.9	Rotationsvolumen	262
5.10	Numerische Berechnung von Integralen	264
5.11	Differentiation von Integralen mit variablen Grenzen	267
5.12	Parameterintegrale	268
6	Wachstums- und Zerfallsprozesse	271
6.1	Grundlagen der Evolutionsgleichungen	271
6.1.1	Einleitung: Die Evolutionsgleichung	272
6.1.2	Diskret oder kontinuierlich ?	274
6.2	Ungebremses Wachstum	275
6.2.1	Der diskrete Fall	275
6.2.2	Zeiteile	276
6.2.3	Grundsätzliches	277

6.2.4	Der Übergang zum kontinuierlichen Modell	279
6.2.5	Zusammenhang zwischen $k_{diskret}$ und k_{kont}	281
6.3	Gebremstes Wachstum - Störung erster Ordnung	283
6.4	Das logistische Wachstum - Störungen zweiter Ordnung	290
6.5	Systeme von Differenzengleichungen	295
6.6	Zusammenfassung Wachstum und Zerfall	297

II Übungen Analysis 1 299

7 Grundlagen 301

7.1	Grundlagen	301
7.2	Komplexe Analysis	302

8 Folgen und Reihen 303

9 Konvergenz von Folgen, Reihen und Funktionen 309

9.1	Konvergenz von Folgen	309
9.2	Unendliche Reihen	311
9.3	Potenzreihen	313
9.4	Grenzwerte von Funktionen	314

10 Differentialrechnung 317

10.1	Die Taylorreihe	318
------	---------------------------	-----

11 Integration 321

12 Wachstums- und Zerfallsprozesse 323

III Analysis 2 325

13 Uneigentliche Integrale 327

13.1	Unendliche Integrationsintervalle	329
13.2	Unbeschränkte Integranden auf endlichen Integrationsintervallen	331
13.3	Absolute Konvergenz	333
13.4	Weitere Konvergenzkriterien	334
13.4.1	Majoranten und Minorantenkriterium für unbeschränkte Integrationsintervalle	334
13.4.2	Majoranten und Minorantenkriterium für unbeschränkte Integranden	335
13.5	Das Integralkriterium zur Konvergenz von Reihen	339

14 Funktionen mehrerer Veränderlicher	349
14.1 Grundbegriffe	349
14.2 Rechnen in Vektorräumen	349
14.3 Metrische Räume	350
14.4 Normen im $\mathbb{R}^n$	353
14.5 Das Skalarprodukt	356
14.6 Mengen im $\mathbb{R}^n$	363
14.6.1 Offene Mengen	363
14.6.2 Abgeschlossene Mengen	364
14.6.3 Beschränktheit und Ordnung	364
14.7 Folgen im $\mathbb{R}^n$	364
14.8 Darstellungsformen der Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$	367
14.9 Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$	369
14.9.1 Grenzwerte im $\mathbb{R}^n$	369
14.9.2 Schnittfunktionen (Partielle Funktionen)	369
14.9.3 Partielle Ableitungen	370
14.9.4 Differentiation komplexer Zahlen	371
14.9.5 Stetigkeit	372
14.9.6 Gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz Stetigkeit	376
14.9.7 Fixpunkte im $\mathbb{R}^n$	377
14.9.8 Der Gradient	378
14.9.9 Die Tangentialebene	380
14.9.10 Die Richtungsableitung	382
14.10 Das vollständige Differential	387
14.10.1 Anwendung: Fehlerrechnung	388
14.10.2 Der relative Fehler	389
14.10.3 Parametrische Funktionen	390
14.10.4 Die Kettenregel	391
14.10.5 Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern	392
14.10.6 Anwendung: Implizite Differentiation	394
14.11 Partielle Ableitungen höherer Ordnung	396
14.11.1 Divergenz und Rotation	397
14.12 Die Taylorentwicklung für $f(x, y)$	401
14.12.1 Eindimensional	401
14.12.2 Zweidimensional	402
14.13 Relative Extremwerte ohne Nebenbedingungen	404
14.13.1 Der eindimensionale Fall	404
14.13.2 Lokale Extrema bei zwei Unbekannten	405
14.13.3 Schreibweise als Hesse-Matrix	411
14.13.4 Extremwerte im $\mathbb{R}^n$	413
14.13.5 Weitere Verfahren zur Analyse der Kandidaten	414
14.13.6 Beispiel 1: Nektar sammelnde Bienen	415
14.13.7 Beispiel 2: Zugvögel (ohne Happy End)	418
14.13.8 Anwendung der Extremwertberechnung: Regressionsanalyse	421
14.13.9 Approximation von Funktionen	427
14.14 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen	428

14.14.1 Lagrange Multiplikatoren	429
14.15 Parametrische Funktionen und Kurvenintegrale	438
14.15.1 Der Tangentenvektor	438
14.15.2 Kurvenintegrale	439
14.15.3 Die Potentialfunktion	447
15 Mehrdimensionale Integration	453
15.1 Einleitung	453
15.2 Berechnung der Integrale	457
15.2.1 Berechnung von Integralen in kartesischen rechteckigen Koordinaten	458
15.2.2 Integration über kartesische krummlinige Bereiche	459
15.2.3 Weitere Anwendungen	461
15.2.4 Integration in Polarkoordinaten	463
15.2.5 Uneigentliche Integrale	470
15.3 Dreifachintegrale	473
15.3.1 Schwerpunktsberechnungen	474
16 Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)	479
16.1 Einleitung	479
16.1.1 Einführende Beispiele (s. Wachstum und Zerfall)	480
16.1.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	483
16.2 Lösungsverfahren für DGL'en erster Ordnung	486
16.2.1 Geometrische Interpretation von $y'=f(x,y)$	486
16.2.2 Substitution	489
16.2.3 Lineare DGL'en	494
16.2.4 Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten	498
16.2.5 Die Bernoulli-Differentialgleichung	502
16.2.6 Zusammenfassung der Lösungsverfahren für DGL 1. Ord- nung	503
16.2.7 Weitere linear inhomogene DGL'en mit nicht-konstanten Koeffizienten	506
16.2.8 Potenzreihenansätze	507
16.2.9 Exakte Differentialgleichungen	510
16.3 Numerische Lösung einer expliziten DGL 1. Ordnung	516
16.4 Lineare DGL'en 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten	519
16.4.1 Lineare Differentialgleichungssysteme	526
16.5 Anwendung 1: Die harmonische Schwingung	531
16.6 Wachstumsprozesse mit Hilfe der Differentialgleichungen	535
16.7 Differentialgleichungen für Störungen zweiter Ordnung	537
IV Übungen Analysis 2	539
17 Uneigentliche Integrale	541

18 Funktionen mehrerer Veränderlicher	543
18.1 Metrische Räume	543
18.2 Normen im $\mathbb{R}^n$	543
18.3 Folgen im $\mathbb{R}^n$	544
18.4 Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$	544
18.5 Das vollständige Differential	545
18.6 Partielle Ableitungen höherer Ordnung	546
18.7 Die Taylorentwicklung für $f(x, y)$	546
18.8 Relative Extremwerte ohne Nebenbedingungen	547
18.9 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen	548
18.10 Parametrische Funktionen und Kurvenintegrale	548
19 Mehrdimensionale Integration	549
19.1 Berechnung der Integrale	549
20 Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)	551
20.1 Lösungsverfahren für DGL'en erster Ordnung	551
20.2 Lineare DGL'en 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten	553
20.3 DGL der Emotionen	553