

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	1
1	Kontinuumsmechanische Grundlagen	5
1.1	Grundlagen aus Linearer Algebra und Analysis	5
1.1.1	Hilfsmittel aus der Tensoralgebra	5
1.1.2	Hilfsmittel aus der Vektoranalysis	8
1.2	Massekontinua	11
1.2.1	Lagrange und Eulersche Koordinaten	12
1.2.2	Kinematische Eigenschaften (Verzerrungstensor)	14
1.2.3	Statische Eigenschaften (Spannungstensor)	17
2	Die Grundgleichungen der Strömungsmechanik	23
2.1	Erhaltungsgleichungen	23
2.1.1	Das Reynolds'sche Transporttheorem	23
2.1.2	Masseerhaltung	25
2.1.3	Impulserhaltung	25
2.1.4	Drehimpulserhaltung	26
2.1.5	Energieerhaltung	27
2.1.6	Bilanzgleichungen	29
2.2	Materialgleichungen	29
2.2.1	Viskositätsmodell	30
2.2.2	Thermodynamische Aspekte	33
2.2.3	Erhaltungsgleichungen in nicht-konservativer Form	36
2.3	Gasdynamische Gleichungen (Euler-Gleichungen)	37
3	Die Grundgleichungen der Strukturmechanik	45
3.1	Mathematische Modelle	45
3.1.1	Das allgemeine nichtlineare Modell	45
3.1.2	Linearisierte Modelle	49
3.1.3	Die Lamé-Naviersche Anfangs-Randwertaufgabe	54
3.1.4	Einfache Anwendungen („Semi-inverse Methode“)	55

3.2	Mathematische Theorie der Lamé-Navierschen Gleichungen	60
3.2.1	Eigenschaften des Elastizitätstensors	61
3.2.2	Eindeutigkeitssatz und Extremalprinzipien	64
3.2.3	Existenz von Lösungen und Wohlgestellttheit	73
3.2.4	Inkompressible Materialien	83
3.2.5	Die Lamé-Naviersche Schwingungsaufgabe	85
3.3	Theorie der Biegung dünner Platten	88
3.3.1	Das Kirchhoffsche Plattenmodell	90
3.3.2	Das nichtlineare von Kármánsche Plattenmodell	96
3.3.3	Physikalisch nichtlineare Plattentheorie	99
3.3.4	Extremalprinzipien	100
4	Incompressible und schwach-kompressible Fluide	103
4.1	Inkompressible Fluide (Navier-Stokes-Gleichungen)	103
4.1.1	Ähnlichkeitslösungen (Reynolds-Zahl)	106
4.1.2	Beispiele: Couette- und Poiseuille-Strömung	109
4.1.3	Laminare Grenzschichten	111
4.2	Thermisch getriebene Stömungen	115
4.2.1	Der Grenzprozess $Ma \rightarrow 0$	116
4.2.2	Die „low-Mach-number“-Approximation	119
4.2.3	Thermische „Konvektionsströmung“ (Boussinesq-Approximation)	121
4.2.4	Ähnlichkeit kompressibler Strömungen	122
4.2.5	Beispiel “heat-driven cavity”	123
4.2.6	Chemisch regierende Strömungen	125
4.2.7	Beispiel “chemischer Strömungsreaktor”	126
4.3	Mathematische Theorie der Navier-Stokes-Gleichungen	127
4.3.1	Die stationären Navier-Stokes-Gleichungen	127
4.3.2	Die instationären Navier-Stokes-Gleichungen	138
4.3.3	Stabilität von Lösungen	140
4.3.4	2D-Approximation und Stromfunktionsformulierung	146
4.3.5	Konfigurationen mit Rotationssymmetrien	150

5	FE-Methoden in der linearen Elastizität	157
5.1	Die klassische „Methode der finiten Elemente“	158
5.2	Die „mathematische“ Finite-Elemente-Methode	163
5.2.1	Abstrakte Formulierung der FEM	163
5.2.2	Praktische Realisierung der FEM	172
5.3	Finite-Elemente-Methoden für die Kirchhoffsche Platte	178
5.3.1	Konforme primale Ansätze	179
5.3.2	Nichtkonforme primale Ansätze	183
5.3.3	Konvergenzanalyse für nichtkonforme Ansätze	185
5.3.4	Gemischte Ansätze	191
6	FE-Methoden für inkompressible Strömungen	203
6.1	FEM für die Stromfunktionsformulierung	203
6.1.1	Konforme primale Ansätze	204
6.1.2	Nicht-konforme primale Ansätze	206
6.1.3	Konvergenzanalyse für nichtkonforme Ansätze	208
6.1.4	Gemischte Ansätze	211
6.2	FE-Diskretisierung des Stokes-Problems	216
6.2.1	„Exakt“ divergenzfreie Stokes-Elemente	217
6.2.2	Allgemeine „Stokes-Elemente“	220
6.2.3	Stabilisierte Stokes-Elemente	235
6.2.4	Lösung der diskreten Stokes-Probleme	240
6.2.5	Schur-Komplement-Verfahren	241
6.3	Lösung der stationären Navier-Stokes-Gleichungen	245
6.3.1	Diskretisierung des Konvektionsterms	245
6.3.2	Linearisierung	253
6.3.3	Algebraische Lösung der linearisierten Probleme	254
6.3.4	Mehrgitter-Verfahren	255
6.4	Lösung der instationären Navier-Stokes-Gleichungen	259
6.4.1	Zeitschrittschemata	260
6.4.2	Projektionsverfahren	265
6.4.3	Lösung der algebraischen Teilprobleme	276

7 FE-Methoden für kompressible Strömungen	279
7.1 Berechnung von Strömungen kleiner Mach-Zahl	279
7.1.1 Das zugrunde liegende „low-Mach number“-Modell	279
7.1.2 Finite-Elemente-Diskretisierung im Ort	280
7.1.3 Projektionsverfahren	280
7.2 Lösung der Euler-Gleichungen	282
7.2.1 DG-Verfahren für lineare Transportprobleme	283
7.2.2 Das DG-Verfahren für hyperbolische Systeme	288
Literaturverzeichnis	295
Index	305