

Inhaltsverzeichnis

1	Sprechweisen, Symbole und Mengen	1
1.1	Sprechweisen und Symbole der Mathematik	1
1.2	Summen- und Produktzeichen	4
1.3	Potenzen und Wurzeln	5
1.4	Symbole der Mengenlehre	5
1.5	Aufgaben	8
2	Die natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen	11
2.1	Die natürlichen Zahlen	11
2.2	Die ganzen Zahlen	15
2.3	Die rationalen Zahlen	15
2.4	Aufgaben	17
3	Die reellen Zahlen	19
3.1	Grundlegendes	19
3.2	Reelle Intervalle	20
3.3	Der Betrag einer reellen Zahl	21
3.4	n -te Wurzeln	22
3.5	Lösen von Gleichungen und Ungleichungen	23
3.6	Maximum, Minimum, Supremum und Infimum	24
3.7	Aufgaben	26
4	Maschinenzahlen	27
4.1	b -adische Darstellung reeller Zahlen	27
4.2	Gleitpunktzahlen	29
4.3	Aufgaben	33
5	Polynome	35
5.1	Polynome – Multiplikation und Division	35
5.2	Faktorisierung von Polynomen	39
5.3	Auswerten von Polynomen	41

5.4	Partialbruchzerlegung	42
5.5	Aufgaben	45
6	Trigonometrische Funktionen	47
6.1	Sinus und Kosinus	47
6.2	Tangens und Kotangens	51
6.3	Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen	53
6.4	Aufgaben	55
7	Komplexe Zahlen – Kartesische Koordinaten	57
7.1	Konstruktion von $\mathbb{C}$	57
7.2	Die imaginäre Einheit und weitere Begriffe	59
7.3	Der Fundamentalsatz der Algebra	60
7.4	Aufgaben	62
8	Komplexe Zahlen – Polarkoordinaten	65
8.1	Die Polardarstellung	65
8.2	Anwendungen der Polardarstellung	67
8.3	Aufgaben	71
9	Lineare Gleichungssysteme	73
9.1	Das Gauß'sche Eliminationsverfahren	73
9.2	Der Rang einer Matrix	78
9.3	Homogene lineare Gleichungssysteme	80
9.4	Aufgaben	82
10	Rechnen mit Matrizen	85
10.1	Definition von Matrizen und einige besondere Matrizen	85
10.2	Rechenoperationen	87
10.3	Invertieren von Matrizen	91
10.4	Rechenregeln	93
10.5	Aufgaben	95
11	LR-Zerlegung einer Matrix	99
11.1	Motivation	99
11.2	Die $L R$ -Zerlegung – vereinfachte Variante	101
11.3	Die $L R$ -Zerlegung – allgemeine Variante	103
11.4	Die $L R$ -Zerlegung – mit Spaltenpivotsuche	106
11.5	Aufgaben	107

12	Die Determinante	109
12.1	Definition der Determinante	109
12.2	Berechnung der Determinante	111
12.3	Anwendungen der Determinante	115
12.4	Aufgaben	117
13	Vektorräume	119
13.1	Definition und wichtige Beispiele	119
13.2	Untervektorräume	122
13.3	Aufgaben	124
14	Erzeugendensysteme und lineare (Un-)Abhängigkeit	127
14.1	Linearkombinationen	127
14.2	Das Erzeugnis von X	130
14.3	Lineare (Un-)Abhängigkeit	131
14.4	Aufgaben	134
15	Basen von Vektorräumen	135
15.1	Basen	135
15.2	Anwendungen auf Matrizen und lineare Gleichungssysteme	140
15.3	Aufgaben	143
16	Orthogonalität I	147
16.1	Skalarprodukte	147
16.2	Länge, Abstand, Winkel und Orthogonalität	150
16.3	Orthonormalbasen	151
16.4	Orthogonale Zerlegung und Linearkombination bezüglich einer ONB	152
16.5	Orthogonale Matrizen	154
16.6	Aufgaben	157
17	Orthogonalität II	159
17.1	Das Orthonormierungsverfahren von Gram und Schmidt	159
17.2	Das Vektor- und das Spatprodukt	162
17.3	Die orthogonale Projektion	165
17.4	Aufgaben	167
18	Das lineare Ausgleichsproblem	171
18.1	Das lineare Ausgleichsproblem und seine Lösung	171
18.2	Die orthogonale Projektion	172
18.3	Lösung eines überbestimmten linearen Gleichungssystems	173
18.4	Die Methode der kleinsten Quadrate	175
18.5	Aufgaben	178

19	Die QR-Zerlegung einer Matrix	181
19.1	Volle und reduzierte QR -Zerlegung	181
19.2	Konstruktion der QR -Zerlegung	182
19.3	Anwendungen der QR -Zerlegung	187
19.4	Aufgaben	189
20	Folgen	191
20.1	Begriffe	191
20.2	Konvergenz und Divergenz von Folgen	194
20.3	Aufgaben	197
21	Berechnung von Grenzwerten von Folgen	199
21.1	Grenzwertbestimmung bei einer expliziten Folge	199
21.2	Grenzwertbestimmung bei einer rekursiven Folge	202
21.3	Aufgaben	205
22	Reihen	207
22.1	Definition und Beispiele	207
22.2	Konvergenzkriterien	210
22.3	Aufgaben	214
23	Abbildungen	217
23.1	Begriffe und Beispiele	217
23.2	Verkettung, injektiv, surjektiv, bijektiv	220
23.3	Die Umkehrabbildung	224
23.4	Beschränkte und monotone Funktionen	226
23.5	Aufgaben	227
24	Potenzreihen	229
24.1	Der Konvergenzbereich reeller Potenzreihen	229
24.2	Der Konvergenzbereich komplexer Potenzreihen	234
24.3	Die Exponential- und die Logarithmusfunktion	235
24.4	Die hyperbolischen Funktionen	237
24.5	Aufgaben	239
25	Grenzwerte und Stetigkeit	241
25.1	Grenzwerte von Funktionen	241
25.2	Asymptoten von Funktionen	245
25.3	Stetigkeit	247
25.4	Wichtige Sätze zu stetigen Funktionen	248
25.5	Das Bisektionsverfahren	249
25.6	Aufgaben	251

26	Differentiation	255
26.1	Die Ableitung und die Ableitungsfunktion	255
26.2	Ableitungsregeln	258
26.3	Numerische Differentiation	262
26.4	Aufgaben	264
27	Anwendungen der Differentialrechnung I	267
27.1	Monotonie	267
27.2	Lokale und globale Extrema	268
27.3	Bestimmung der Extrema und Extremalstellen	271
27.4	Konvexität	274
27.5	Die Regel von L'Hospital	276
27.6	Aufgaben	278
28	Anwendungen der Differentialrechnung II	281
28.1	Das Newtonverfahren	281
28.2	Taylorentwicklung	284
28.3	Restgliedabschätzungen	288
28.4	Bestimmung von Taylorreihen	292
28.5	Aufgaben	294
29	Polynom- und Splineinterpolation	297
29.1	Polynominterpolation	297
29.2	Konstruktion kubischer Splines	301
29.3	Aufgaben	305
30	Integration I	307
30.1	Das bestimmte Integral	307
30.2	Das unbestimmte Integral	311
30.3	Aufgaben	318
31	Integration II	321
31.1	Integration rationaler Funktionen	321
31.2	Rationale Funktionen in Sinus und Kosinus	324
31.3	Numerische Integration	326
31.4	Volumina und Oberflächen von Rotationskörpern	329
31.5	Aufgaben	330
32	Uneigentliche Integrale	333
32.1	Berechnung uneigentlicher Integrale	333
32.2	Das Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale	336
32.3	Aufgaben	338

33	Separierbare und lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	339
33.1	Erste Differentialgleichungen	340
33.2	Separierbare Differentialgleichungen	341
33.3	Die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung	345
33.4	Aufgaben	347
34	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	349
34.1	Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	350
34.2	Inhomogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	354
34.3	Aufgaben	360
35	Einige besondere Typen von Differentialgleichungen	363
35.1	Die homogene Differentialgleichung	363
35.2	Die Euler'sche Differentialgleichung	365
35.3	Die Bernoulli'sche Differentialgleichung	367
35.4	Die Riccati'sche Differentialgleichung	368
35.5	Der Potenzreihenansatz	370
35.6	Aufgaben	373
36	Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen I	375
36.1	Erste Verfahren	375
36.2	Runge-Kuttaverfahren	379
36.3	Mehrschrittverfahren	382
36.4	Aufgaben	384
37	Lineare Abbildungen und Darstellungsmatrizen	387
37.1	Definitionen und Beispiele	387
37.2	Bild, Kern und die Dimensionsformel	390
37.3	Koordinatenvektoren	391
37.4	Darstellungsmatrizen	393
37.5	Aufgaben	395
38	Basistransformation	397
38.1	Die Darstellungsmatrix der Verkettungen linearer Abbildungen	397
38.2	Basistransformation	399
38.3	Die zwei Methoden zur Bestimmung von Darstellungsmatrizen	400
38.4	Aufgaben	403
39	Diagonalisierung – Eigenwerte und Eigenvektoren	405
39.1	Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen	405
39.2	Diagonalisieren von Matrizen	407

39.3	Das charakteristische Polynom einer Matrix	409
39.4	Diagonalisierung reeller symmetrischer Matrizen	413
39.5	Aufgaben	416
40	Numerische Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren	419
40.1	Gerschgorinkreise	419
40.2	Vektoriteration	421
40.3	Das Jacobiverfahren	423
40.4	Das Q R -Verfahren	427
40.5	Aufgaben	429
41	Quadriken	431
41.1	Begriffe und erste Beispiele	431
41.2	Transformation auf Normalform	435
41.3	Aufgaben	440
42	Schurzerlegung und Singulärwertzerlegung	441
42.1	Die Schurzerlegung	441
42.2	Berechnung der Schurzerlegung	442
42.3	Singulärwertzerlegung	445
42.4	Bestimmung der Singulärwertzerlegung	446
42.5	Aufgaben	450
43	Die Jordannormalform I	453
43.1	Existenz der Jordannormalform	453
43.2	Verallgemeinerte Eigenräume	456
43.3	Aufgaben	460
44	Die Jordannormalform II	463
44.1	Konstruktion einer Jordanbasis	463
44.2	Anzahl und Größe der Jordankästchen	470
44.3	Aufgaben	471
45	Definitheit und Matrixnormen	473
45.1	Definitheit von Matrizen	473
45.2	Matrixnormen	477
45.3	Aufgaben	483
46	Funktionen mehrerer Veränderlicher	485
46.1	Die Funktionen und ihre Darstellungen	485
46.2	Einige topologische Begriffe	488
46.3	Folgen, Grenzwerte, Stetigkeit	490
46.4	Aufgaben	493

47	Partielle Differentiation – Gradient, Hessematrix, Jacobimatrix	495
47.1	Der Gradient	495
47.2	Die Hessematrix	500
47.3	Die Jacobimatrix	502
47.4	Aufgaben	505
48	Anwendungen der partiellen Ableitungen	509
48.1	Das (mehrdimensionale) Newtonverfahren	509
48.2	Taylorentwicklung	512
48.3	Aufgaben	518
49	Extremwertbestimmung	521
49.1	Lokale und globale Extrema	521
49.2	Bestimmung der Extrema und Extremalstellen	525
49.3	Aufgaben	530
50	Extremwertbestimmung unter Nebenbedingungen	533
50.1	Extrema unter Nebenbedingungen	533
50.2	Das Einsetzverfahren	535
50.3	Die Lagrange'sche Multiplikatorenregel	537
50.4	Extrema unter mehreren Nebenbedingungen	542
50.5	Aufgaben	544
51	Totale Differentiation, Differentialoperatoren	547
51.1	Totale Differenzierbarkeit	547
51.2	Das totale Differential	549
51.3	Differentialoperatoren	551
51.4	Aufgaben	554
52	Implizite Funktionen	557
52.1	Implizite Funktionen – der einfache Fall	557
52.2	Implizite Funktionen – der allgemeine Fall	562
52.3	Aufgaben	565
53	Koordinatentransformationen	567
53.1	Transformationen und Transformationsmatrizen	567
53.2	Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten	568
53.3	Die Differentialoperatoren in kartesischen Zylinder- und Kugelkoordinaten	570
53.4	Umrechnung von Vektorfeldern und Skalarfeldern	573
53.5	Aufgaben	576

54	Kurven I	579
54.1	Begriffe	579
54.2	Länge einer Kurve	585
54.3	Aufgaben	588
55	Kurven II	591
55.1	Umparametrisierung einer Kurve	591
55.2	Begleitendes Dreibein, Krümmung und Torsion	593
55.3	Die Leibniz'sche Sektorformel	596
55.4	Aufgaben	598
56	Kurvenintegrale	601
56.1	Skalare und vektorielle Kurvenintegrale	601
56.2	Anwendungen der Kurvenintegrale	606
56.3	Aufgaben	608
57	Gradientenfelder	609
57.1	Definitionen	609
57.2	Existenz einer Stammfunktion	611
57.3	Bestimmung einer Stammfunktion	613
57.4	Aufgaben	615
58	Bereichsintegrale	617
58.1	Integration über Rechtecke bzw. Quader	617
58.2	Normalbereiche	620
58.3	Integration über Normalbereiche	622
58.4	Aufgaben	625
59	Die Transformationsformel	627
59.1	Integration über Polar-, Zylinder-, Kugel- und weitere Koordinaten	627
59.2	Anwendung: Massen- und Schwerpunktbestimmung	632
59.3	Aufgaben	633
60	Flächen und Flächenintegrale	637
60.1	Reguläre Flächen	637
60.2	Flächenintegrale	640
60.3	Übersicht über die behandelten Integrale	643
60.4	Aufgaben	644
61	Integralsätze I	647
61.1	Der ebene Satz von Green	647
61.2	Der ebene Satz von Gauß	650
61.3	Aufgaben	653

62	Integralsätze II	655
62.1	Der Divergenzsatz von Gauß	655
62.2	Der Satz von Stokes	659
62.3	Aufgaben	663
63	Allgemeines zu Differentialgleichungen	665
63.1	Das Richtungsfeld	665
63.2	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	666
63.3	Transformation auf Systeme 1. Ordnung	668
63.4	Aufgaben	670
64	Die exakte Differentialgleichung	671
64.1	Definition exakter DGLen	671
64.2	Das Lösungsverfahren	672
64.3	Aufgaben	676
65	Lineare Differentialgleichungssysteme I	677
65.1	Die Exponentialfunktion für Matrizen	677
65.2	Die Exponentialfunktion als Lösung linearer DGL-Systeme	680
65.3	Die Lösung für ein diagonalisierbares A	681
65.4	Aufgaben	685
66	Lineare Differentialgleichungssysteme II	687
66.1	Die Exponentialfunktion als Lösung linearer DGL-Systeme	687
66.2	Die Lösung für ein nichtdiagonalisierbares A	690
66.3	Aufgaben	692
67	Lineare Differentialgleichungssysteme III	693
67.1	Lösen von DGL-Systemen	693
67.2	Stabilität	697
67.3	Aufgaben	702
68	Randwertprobleme	705
68.1	Typen von Randwertproblemen	705
68.2	Erste Lösungsmethoden	706
68.3	Lineare Randwertprobleme	707
68.4	Die Methode mit der Green'schen Funktion	709
68.5	Aufgaben	712
69	Grundbegriffe der Numerik	713
69.1	Kondition	714
69.2	Die Groß-O-Notation	716
69.3	Stabilität	717
69.4	Aufgaben	718

70	Fixpunktiteration	721
70.1	Die Fixpunktgleichung	721
70.2	Die Konvergenz von Iterationsverfahren	723
70.3	Implementation	726
70.4	Konvergenzgeschwindigkeit	727
70.5	Aufgaben	728
71	Iterative Verfahren für lineare Gleichungssysteme	729
71.1	Lösen von Gleichungssystemen durch Fixpunktiteration	729
71.2	Das Jacobiverfahren	730
71.3	Das Gauß-Seidelverfahren	732
71.4	Relaxation	733
71.5	Aufgaben	736
72	Optimierung	737
72.1	Das Optimum	737
72.2	Das Gradientenverfahren	738
72.3	Newtonverfahren	739
72.4	Aufgaben	741
73	Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen II	743
73.1	Lösungsverfahren für DGL-Systeme	743
73.2	Konsistenz und Konvergenz von Einschrittverfahren	745
73.3	Steife Differentialgleichungen	749
73.4	Randwertprobleme	752
73.5	Aufgaben	759
74	Fourierreihen – Berechnung der Fourierkoeffizienten	763
74.1	Periodische Funktionen	763
74.2	Die zulässigen Funktionen	766
74.3	Entwicklung in Fourierreihen – reelle Version	767
74.4	Anwendung: Berechnung von Reihenwerten	771
74.5	Entwicklung in Fourierreihen – komplexe Version	771
74.6	Aufgaben	775
75	Fourierreihen – Hintergründe, Sätze und Anwendung	777
75.1	Das Orthonormalsystem $1/\sqrt{2}, \cos(kx), \sin(kx)$	777
75.2	Sätze und Regeln	779
75.3	Anwendung auf lineare Differentialgleichungen	783
75.4	Aufgaben	785

76	Fouriertransformation I	787
76.1	Die Fouriertransformation	787
76.2	Die inverse Fouriertransformation	793
76.3	Aufgaben	795
77	Fouriertransformation II	797
77.1	Die Regeln und Sätze zur Fouriertransformation	797
77.2	Anwendung auf lineare Differentialgleichungen	800
77.3	Aufgaben	805
78	Diskrete Fouriertransformation	807
78.1	Näherungsweise Bestimmung der Fourierkoeffizienten	807
78.2	Die inverse diskrete Fouriertransformation	811
78.3	Trigonometrische Interpolation	811
78.4	Aufgaben	816
79	Die Laplacetransformation	819
79.1	Die Laplacetransformation	820
79.2	Die Rechenregeln bzw. Sätze zur Laplacetransformation	822
79.3	Anwendungen	825
79.4	Aufgaben	832
80	Holomorphe Funktionen	835
80.1	Komplexe Funktionen	835
80.2	Komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie	842
80.3	Aufgaben	845
81	Komplexe Integration	847
81.1	Komplexe Kurven	847
81.2	Komplexe Kurvenintegrale	849
81.3	Der Cauchyintegralsatz und die Cauchyintegralformel	852
81.4	Aufgaben	858
82	Laurentreihen	859
82.1	Singularitäten	859
82.2	Laurentreihen	860
82.3	Laurentreihenentwicklung	863
82.4	Aufgaben	866
83	Der Residuenkalkül	867
83.1	Der Residuensatz	867
83.2	Berechnung reeller Integrale	871
83.3	Aufgaben	875

84	Konforme Abbildungen	877
84.1	Allgemeines zu konformen Abbildungen	877
84.2	Möbiustransformationen	879
84.3	Aufgaben	884
85	Harmonische Funktionen und das Dirichlet'sche Randwertproblem	887
85.1	Harmonische Funktionen	887
85.2	Das Dirichlet'sche Randwertproblem	890
85.3	Aufgaben	897
86	Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung	899
86.1	Lineare pDGLen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	900
86.2	Lineare pDGLen 1. Ordnung	903
86.3	Die quasilineare pDGL erster Ordnung	905
86.4	Das Charakteristikenverfahren	907
86.5	Aufgaben	910
87	Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung – Allgemeines	913
87.1	Erste Begriffe	913
87.2	Die Typeneinteilung	915
87.3	Lösungsmethoden	917
87.4	Aufgaben	919
88	Die Laplace- bzw. Poissongleichung	921
88.1	Randwertprobleme für die Poissongleichung	921
88.2	Lösungen der Laplacegleichung	922
88.3	Das Dirichlet'sche Randwertproblem für einen Kreis	924
88.4	Numerische Lösung	925
88.5	Aufgaben	929
89	Die Wärmeleitungsgleichung	931
89.1	Anfangs-Randwertprobleme für die Wärmeleitungsgleichung	931
89.2	Lösungen der Gleichung	932
89.3	Nullrandbedingung: Lösung mit Fourierreihen	934
89.4	Numerische Lösung	936
89.5	Aufgaben	939
90	Die Wellengleichung	941
90.1	Anfangs-Randwertprobleme für die Wellengleichung	941
90.2	Lösungen der Gleichung	942
90.3	Die schwingende Saite: Lösung mit Fourierreihen	943
90.4	Numerische Lösung	946
90.5	Aufgaben	949

91 Lösen von pDGLen mit Fourier- und Laplacetransformation 951
 91.1 Ein einführendes Beispiel 951
 91.2 Das allgemeine Vorgehen 953
 91.3 Aufgaben 957
Sachverzeichnis 959