

# Inhaltsverzeichnis

|                                                                                             |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Vorwort</b> .....                                                                        | IX  |
| <b>1 Einführung</b> .....                                                                   | 1   |
| <b>2 Hintergrund und Motivation</b> .....                                                   | 15  |
| 2.1 Kausalität – Determinismus .....                                                        | 16  |
| 2.2 Dynamische Systeme – Beispiele .....                                                    | 24  |
| 2.3 Phasenraum .....                                                                        | 31  |
| 2.4 Erste Integrale und Mannigfaltigkeiten .....                                            | 33  |
| 2.5 Qualitative und quantitative Betrachtungsweise .....                                    | 38  |
| <b>3 Mathematische Einführung in dynamische Systeme</b> .....                               | 39  |
| 3.1 Lineare autonome Systeme .....                                                          | 39  |
| 3.2 Nichtlineare Systeme und Stabilität .....                                               | 51  |
| 3.3 Invariante Mannigfaltigkeiten .....                                                     | 58  |
| 3.4 Diskretisierung in der Zeit .....                                                       | 60  |
| 3.5 Poincaré-Abbildung .....                                                                | 62  |
| 3.6 Fixpunkte und Zyklen diskreter Systeme .....                                            | 64  |
| 3.7 Ein Beispiel diskreter Dynamik – die logistische Abbildung .....                        | 68  |
| 3.8 Fourier-Reihe und Fourier-Integral .....                                                | 75  |
| 3.8.1 Fourier-Reihe .....                                                                   | 75  |
| 3.8.2 Fourier-Integral und Fourier-Transformation .....                                     | 79  |
| 3.8.3 Eigenschaften der Fourier-Transformation .....                                        | 81  |
| 3.8.4 Einfache Fourier-Transformationen, Linienspektren,<br>Diracs $\delta$ -Funktion ..... | 85  |
| 3.8.5 Wavelet-Transformation .....                                                          | 89  |
| 3.9 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie .....                                      | 92  |
| 3.9.1 Zufallsexperiment .....                                                               | 94  |
| 3.9.2 Zufallsvariable .....                                                                 | 96  |
| 3.9.3 Wahrscheinlichkeit .....                                                              | 97  |
| 3.9.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Verbundwahrscheinlichkeit .....                       | 102 |
| 3.9.5 Verteilungsfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte .....                               | 104 |
| 3.9.6 Maßzahlen einer Verteilung .....                                                      | 108 |
| 3.9.7 Unabhängige und abhängige Ereignisse .....                                            | 111 |
| 3.9.8 Momenterzeugende und charakteristische Funktion .....                                 | 113 |
| 3.9.9 Spezielle Verteilungen .....                                                          | 116 |
| 3.9.10 Zentraler Grenzwertsatz .....                                                        | 124 |
| 3.9.11 Cauchy-Verteilung und $\alpha$ -stabile Lévy-Verteilung .....                        | 128 |

|          |                                                                                        |            |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.9.12   | Analyse stochastischer Prozesse .....                                                  | 133        |
| 3.10     | Invariantes Maß und ergodische Bahnen .....                                            | 139        |
| 3.10.1   | Natürliche invariante Dichte der logistischen Abbildung ....                           | 139        |
| 3.10.2   | Frobenius-Perron-Gleichung und ergodisches Maß .....                                   | 144        |
| <b>4</b> | <b>Dynamische Systeme ohne Dissipation .....</b>                                       | <b>149</b> |
| 4.1      | Hamiltonsche Gleichungen .....                                                         | 149        |
| 4.2      | Kanonische Transformationen, Integrierbarkeit .....                                    | 156        |
| 4.3      | f-dimensionale Ringe (Tori) und Trajektorien .....                                     | 166        |
| 4.4      | Die Grundzüge der KAM-Theorie .....                                                    | 169        |
| 4.5      | Instabile Tori, chaotische Bereiche .....                                              | 174        |
| 4.6      | Ein numerisches Beispiel: die Hénon-Abbildung.....                                     | 184        |
| <b>5</b> | <b>Dynamische Systeme mit Dissipation .....</b>                                        | <b>201</b> |
| 5.1      | Volumenkontraktion – eine wesentliche Eigenschaft<br>dissipativer Systeme .....        | 202        |
| 5.2      | Seltsamer Attraktor: Lorenz-Attraktor .....                                            | 204        |
| 5.3      | Leistungsspektrum und Autokorrelation .....                                            | 210        |
| 5.4      | Lyapunov-Exponenten .....                                                              | 214        |
| 5.4.1    | Lineare Stabilitätsanalyse nichtlinearer Systeme:<br>Gleichgewichtszustand .....       | 215        |
| 5.4.2    | Stabilität periodischer Lösungen: Floquet-Theorie .....                                | 221        |
| 5.4.3    | Lyapunov-Exponent eindimensionaler Abbildungen .....                                   | 231        |
| 5.4.4    | Lyapunov-Exponenten n-dimensionaler<br>kontinuierlicher Systeme.....                   | 234        |
| 5.4.5    | Lyapunov-Exponenten n-dimensionaler diskreter Systeme...                               | 241        |
| 5.4.6    | Numerische Berechnung der Lyapunov-Exponenten .....                                    | 243        |
| 5.4.7    | Lyapunov-Vektoren .....                                                                | 249        |
| 5.5      | Dimensionen .....                                                                      | 254        |
| 5.5.1    | Cantor-Menge .....                                                                     | 256        |
| 5.5.2    | Fraktaldimensionen: Kapazitätsdimension und<br>Hausdorff-Besicovitch-Dimension .....   | 260        |
| 5.5.3    | Informationsdimension .....                                                            | 262        |
| 5.5.4    | Korrelationsdimension, punktweise Dimension und<br>Rekonstruktion von Attraktoren..... | 275        |
| 5.5.5    | Verallgemeinerte Dimension $D_q$ .....                                                 | 291        |
| 5.5.6    | Lyapunov-Dimension und Kaplan-Yorke-Vermutung .....                                    | 293        |
| 5.6      | Kolmogorov-Sinai-Entropie .....                                                        | 299        |
| 5.6.1    | Der Bernoulli-Shift .....                                                              | 300        |
| 5.6.2    | Definition der KS-Entropie .....                                                       | 304        |
| 5.6.3    | Zusammenhang zwischen KS-Entropie und<br>Lyapunov-Exponenten .....                     | 311        |
| 5.6.4    | Zeitspanne für verlässliche Prognosen .....                                            | 313        |

|          |                                                                              |     |
|----------|------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>6</b> | <b>Lokale Bifurkationstheorie</b>                                            | 317 |
| 6.1      | Motivation                                                                   | 319 |
| 6.2      | Zentrumsmanigfaltigkeit                                                      | 327 |
| 6.3      | Normalformen                                                                 | 346 |
| 6.4      | Normalformen von Verzweigungen einparametriger Flüsse                        | 360 |
| 6.5      | Stabilität von Verzweigungen infolge Störungen                               | 380 |
| 6.6      | Verzweigungen von Fixpunkten einparametriger Abbildungen                     | 383 |
| 6.7      | Renormierung und Selbstähnlichkeit<br>am Beispiel der logistischen Abbildung | 407 |
| 6.7.1    | Der Mechanismus der Periodenverdopplung ad infinitum                         | 407 |
| 6.7.2    | Superstabile Zyklen                                                          | 415 |
| 6.7.3    | Selbstähnlichkeit im $x$ -Raum                                               | 420 |
| 6.7.4    | Selbstähnlichkeit im Parameterraum                                           | 430 |
| 6.7.5    | Zusammenhang mit Phasenübergängen 2. Ordnung und<br>Renormierungsmethoden    | 443 |
| 6.8      | Ein beschreibender Exkurs in die Synergetik                                  | 448 |
| <b>7</b> | <b>Konvektionsströmungen: Bénard-Problem</b>                                 | 457 |
| 7.1      | Hydrodynamische Grundgleichungen                                             | 464 |
| 7.2      | Boussinesq-Oberbeck-Approximation                                            | 474 |
| 7.3      | Lorenz-Modell                                                                | 476 |
| 7.4      | Entwicklung des Lorenz-Systems                                               | 481 |
| <b>8</b> | <b>Wege zum Chaos</b>                                                        | 493 |
| 8.1      | Landau-Szenario                                                              | 493 |
| 8.2      | Ruelle-Takens-Szenario                                                       | 498 |
| 8.2.1    | Instabilität quasiperiodischer Bewegungen<br>auf dem 3D-Torus                | 499 |
| 8.2.2    | Experimente von Swinney und Gollub                                           | 503 |
| 8.3      | Universelle Eigenschaften des Übergangs von Quasiperiodizität zu<br>Chaos    | 507 |
| 8.3.1    | Der impulsartig erregte gedämpfte Oszillator                                 | 508 |
| 8.3.2    | Die eindimensionale Kreisabbildung                                           | 511 |
| 8.3.3    | Skalierungseigenschaften der Kreisabbildung                                  | 523 |
| 8.3.3.1  | Lokale Skalierungsgesetze                                                    | 523 |
| 8.3.3.2  | Globale Skalierungsgesetze                                                   | 534 |
| 8.4      | Die Feigenbaum-Route über Periodenverdopplungen ins Chaos                    | 540 |
| 8.4.1    | Weitere Skalierungseigenschaften der<br>Periodenverdopplungskaskade          | 544 |
| 8.4.2    | Experimenteller Nachweis der Feigenbaum-Route                                | 555 |
| 8.5      | Quasiperiodischer Übergang bei fester Windungszahl                           | 559 |
| 8.5.1    | Skalierungseigenschaften des quasiperiodischen Übergangs                     | 560 |
| 8.5.2    | Multifraktale Strukturen                                                     | 567 |
| 8.5.3    | Experimenteller Nachweis des quasiperiodischen Übergangs                     | 576 |
| 8.6      | Der Weg über Intermittenz ins Chaos                                          | 582 |
| 8.6.1    | Intermittenz bei der logistischen Abbildung                                  | 583 |

|          |                                                                           |            |
|----------|---------------------------------------------------------------------------|------------|
| 8.6.2    | Klassifikation der Intermittenz .....                                     | 588        |
| 8.6.3    | Typ I-Intermittenz .....                                                  | 590        |
| 8.6.4    | Typ III-Intermittenz .....                                                | 599        |
| 8.6.5    | Typ II-Intermittenz .....                                                 | 605        |
| 8.7      | Wege aus dem Chaos, Steuerung des Chaos .....                             | 608        |
| 8.7.1    | Chaos-Kontrolle ohne Rückkopplung .....                                   | 611        |
| 8.7.2    | Chaos-Kontrolle mit Rückkopplung .....                                    | 612        |
| <b>9</b> | <b>Turbulenz .....</b>                                                    | <b>617</b> |
| 9.1      | Dynamik inkompressibler Flüssigkeiten .....                               | 622        |
| 9.1.1    | Die hydrodynamischen Grundgleichungen .....                               | 622        |
| 9.1.2    | Die lokale Energiedissipationsrate .....                                  | 625        |
| 9.1.3    | Die Wirbeltransportgleichung .....                                        | 627        |
| 9.1.4    | Die Lagrangesche Behandlung von Flüssigkeitsströmungen ..                 | 631        |
| 9.1.5    | Lagrangesche kohärente Strukturen .....                                   | 634        |
| 9.1.6    | Hydrodynamische Wirbel .....                                              | 639        |
| 9.1.6.1  | Lamb-Oseen-Wirbel .....                                                   | 639        |
| 9.1.6.2  | Gestreckte Wirbel .....                                                   | 641        |
| 9.1.6.3  | Lundgren-Wirbel .....                                                     | 644        |
| 9.2      | Vom Chaos zur Turbulenz .....                                             | 644        |
| 9.2.1    | Chaos in Flüssigkeitströmungen .....                                      | 644        |
| 9.2.2    | Dynamik von Punktwirbeln in zweidimensionalen idealen<br>Strömungen ..... | 644        |
| 9.2.2.1  | Der Hamiltonsche Charakter der<br>Punktwirbeldynamik .....                | 646        |
| 9.2.2.2  | Zwei Punktwirbel .....                                                    | 647        |
| 9.2.2.3  | Drei Punktwirbel .....                                                    | 649        |
| 9.2.2.4  | Vier Punktwirbel .....                                                    | 652        |
| 9.2.2.5  | Mischung durch Punktwirbel .....                                          | 654        |
| 9.2.3    | Die Onsagersche Gleichgewichtstheorie .....                               | 655        |
| 9.2.3.1  | Viskosität .....                                                          | 655        |
| 9.3      | Turbulenz: Determinismus und Stochastizität .....                         | 657        |
| 9.3.1    | Statistische Mittelwertbildung .....                                      | 657        |
| 9.3.2    | Momentengleichungen: Das Schließungsproblem der<br>Turbulenz .....        | 659        |
| 9.3.3    | Zerfallende Turbulenz .....                                               | 660        |
| 9.3.4    | Reynoldssche Gleichung und Turbulenz-Modellierung .....                   | 660        |
| 9.4      | Charakteristische Skalen der Turbulenz .....                              | 663        |
| 9.4.1    | Taylor-Hypothese .....                                                    | 663        |
| 9.4.2    | Phänomenologie des Wirbelzerfalls und Energiekaskade .....                | 663        |
| 9.4.3    | Die integrale Länge $L$ .....                                             | 664        |
| 9.4.4    | Die Kolmogorovschen Skalen .....                                          | 665        |
| 9.4.5    | Die Taylor-Länge .....                                                    | 665        |
| 9.4.6    | Die Taylor-Reynolds-Zahl .....                                            | 666        |
| 9.5      | Die turbulente Kaskade .....                                              | 666        |
| 9.5.1    | Die von Kármán-Howarth-Relation .....                                     | 666        |

|           |                                                                                  |            |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 9.5.2     | Das Energiespektrum $E(k)$ .....                                                 | 669        |
| 9.5.3     | Die Energiekaskade in der dreidimensionalen Turbulenz ....                       | 670        |
| 9.5.4     | Heisenbergs Theorie .....                                                        | 672        |
| 9.6       | Die Kolmogorovsche Theorie der lokal isotropen Turbulenz .....                   | 674        |
| 9.6.1     | Die Evolutionsgleichung für die Geschwindigkeitsinkremente                       | 674        |
| 9.6.2     | Die Energiebilanz des Geschwindigkeitsinkrementes .....                          | 675        |
| 9.6.3     | Die gemittelte Energiebilanzgleichung .....                                      | 677        |
| 9.6.3.1   | Homogene Turbulenz .....                                                         | 677        |
| 9.6.3.2   | Homogene, isotrope Turbulenz .....                                               | 678        |
| 9.6.3.3   | Das Kolmogorovsche -4/5 Gesetz .....                                             | 678        |
| 9.6.3.4   | Dissipationsbereich .....                                                        | 679        |
| 9.6.3.5   | Inertialbereich .....                                                            | 680        |
| 9.6.4     | Die Kolmogorovsche Theorie K41 .....                                             | 680        |
| 9.6.4.1   | Universalität der Statistik der kleinskaligen<br>Turbulenz .....                 | 681        |
| 9.6.4.2   | Ähnlichkeitsverhalten im Inertialbereich .....                                   | 682        |
| 9.6.4.3   | Selbstähnlichkeit und fraktale Skalengesetze .....                               | 682        |
| 9.6.4.4   | Experimentelle Überprüfung der<br>Selbstähnlichkeitshypothese .....              | 684        |
| 9.6.5     | Das Phänomen der Intermittenz .....                                              | 685        |
| 9.6.6     | Kolmogorov K62 .....                                                             | 686        |
| 9.6.7     | Multifraktales Modell .....                                                      | 688        |
| 9.6.8     | Multiskalen-Statistik .....                                                      | 690        |
| 9.7       | Ausblick .....                                                                   | 696        |
| 9.8       | Anhang: Isotrope Tensorfelder .....                                              | 697        |
| 9.8.1     | Longitudinale und transversale Korrelationsfunktionen ....                       | 699        |
| 9.8.1.1   | Die Korrelationsfunktion dritter Ordnung .....                                   | 700        |
| 9.8.2     | Korrelationsfunktionen für inkompressible, isotrope und<br>homogene Felder ..... | 701        |
| 9.8.2.1   | Die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung .....                                   | 701        |
| 9.8.2.2   | Die Korrelationsfunktion dritter Ordnung .....                                   | 701        |
| 9.8.3     | Strukturfunktionen inkompressibler Felder .....                                  | 702        |
| 9.8.3.1   | Strukturfunktion zweiter Ordnung .....                                           | 702        |
| 9.8.3.2   | Strukturfunktion dritter Ordnung .....                                           | 703        |
| <b>10</b> | <b>Computerexperimente .....</b>                                                 | <b>705</b> |
| 10.1      | Einblick in Knochenumbauprozesse .....                                           | 708        |
| 10.2      | Hénon-Abbildung .....                                                            | 724        |
| 10.3      | Wiederbegegnung mit dem Lorenz-System .....                                      | 731        |
| 10.4      | Van der Polsche Gleichung .....                                                  | 737        |
| 10.4.1    | Selbsterregte Schwingung .....                                                   | 738        |
| 10.4.2    | Fremderregter Van der Pol Oszillator .....                                       | 744        |
| 10.5      | Duffing-Gleichung .....                                                          | 760        |
| 10.6      | Shilnikov-Bifurkationen .....                                                    | 782        |
| 10.7      | Julia-Mengen und ihr Ordnungsprinzip .....                                       | 792        |
| 10.8      | Struktur der Arnold-Zungen .....                                                 | 806        |

|                                       |                                                                                            |            |
|---------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 10.9                                  | Zur Kinetik chemischer Reaktionen an Einkristall-Oberflächen . . . .                       | 816        |
| 10.9.1                                | Oxidation von Wasserstoff an einer Platin-Elektrode . . . . .                              | 817        |
| 10.9.2                                | Zur Kinetik der katalytischen Oxidation von CO an Pt(110) . . . . .                        | 820        |
| 10.9.2.1                              | Phänomenologie der katalytischen Oxidation . . . . .                                       | 820        |
| 10.9.2.2                              | Schrittweise Formulierung eines kinetischen Modells . . . . .                              | 824        |
| 10.9.3                                | Identifikation von Chaos und Hyperchaos bei kinetischen<br>Oberflächenreaktionen . . . . . | 831        |
| 10.9.4                                | Raumzeitliche Musterbildung . . . . .                                                      | 834        |
| <b>Farbtafeln . . . . .</b>           |                                                                                            | <b>843</b> |
| <b>Literaturverzeichnis . . . . .</b> |                                                                                            | <b>875</b> |
| <b>Index . . . . .</b>                |                                                                                            | <b>899</b> |