

INHALTSVERZEICHNIS

| | |
|---|----|
| 1. Grundlagen | 1 |
| 1.1. Logik und Beweisen | 1 |
| <i>Aussagen, logische Operationen und, oder, Negation, Implikation, Äquivalenz, Wahrheitstafeln, All- und Existenzaussagen</i> | |
| Aufgaben zu Abschnitt 1.1 | 5 |
| 1.2. Mengen | 7 |
| <i>Cantorscher Mengenbegriff, Teilmengen, Vereinigung, Durchschnitt, Komplement, direktes Produkt, Familien</i> | |
| Aufgaben zu Abschnitt 1.2 | 13 |
| 1.3. Abbildungen | 15 |
| <i>Abbildungen, Bild, Urbild, Komposition, injektiv, surjektiv, bijektiv, Umkehrabbildung</i> | |
| Aufgaben zu Abschnitt 1.3 | 21 |
| 1.4. Ergänzungen zu 1.2 und 1.3 | 23 |
| <i>Direktes Produkt und Projektionen, Graph einer Abbildung, Abbildungen endlicher Mengen</i> | |
| 2. Etwas Algebra | 25 |
| 2.1. Gruppen | 25 |
| <i>Verknüpfungen, neutrale und inverse Elemente, Gruppen, Gruppenhomomorphismen, Beispiel $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$</i> | |
| Aufgaben zu Abschnitt 2.1 | 31 |
| 2.2. Ringe | 33 |
| <i>Ringe, Rechnen in kommutativen Ringen, Ringhomomorphismen, Einheiten, Beispiel $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$</i> | |
| Aufgaben zu Abschnitt 2.2 | 39 |
| 2.3. Körper | 41 |
| <i>Körper, Körper der komplexen Zahlen, Körper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, lineare Gleichungssysteme über Körpern</i> | |
| Aufgaben zu Abschnitt 2.3 | 45 |
| 3. Vektorräume | 47 |
| 3.1. Vektorräume und Untervektorräume | 47 |
| <i>Vektorräume, \mathbb{K}^n, Untervektorräume, Durchschnitt von Untervektorräumen, Vektorräume von Abbildungen</i> | |
| Aufgaben zu Abschnitt 3.1 | 53 |
| 3.2. Lineare Hülle und lineare (Un-)abhängigkeit | 55 |
| <i>Linearkombinationen, lineare Hülle, lineare Abhängigkeit, lineare Unabhängigkeit</i> | |
| Aufgaben zu Abschnitt 3.2 | 59 |
| 3.3. Basen und Koordinaten | 61 |
| <i>Erzeugendensysteme, Basen, Entwicklung nach einer Basis, Koordinaten, Vektorraum der Polynome</i> | |

| | |
|--|-----|
| Aufgaben zu Abschnitt 3.3 | 67 |
| 3.4. Existenz von Basen und Dimension | 69 |
| <i>Basisergänzungssatz, Austauschprinzip, Dimensionsbegriff</i> | |
| Aufgaben zu Abschnitt 3.4 | 73 |
| 4. Lineare Abbildungen | 75 |
| 4.1. Lineare Abbildungen | 75 |
| <i>Lineare Abbildungen, Kern, Bild, Charakterisierung der Injektivität, Dimensionsformel und ihre Anwendungen</i> | |
| Aufgaben zu Abschnitt 4.1 | 81 |
| 4.2. Matrizen | 83 |
| <i>Matrizen, Matrix-Vektor-Multiplikation, Matrizenmultiplikation, Matrizenring, Invertierbarkeit</i> | |
| Aufgaben zu Abschnitt 4.2 | 87 |
| 4.3. Lineare Abbildungen und Matrizen | 89 |
| <i>Korrespondenz zwischen Matrizen und linearen Abbildungen, Vektorraum der linearen Abbildungen, Endomorphismenring</i> | |
| Aufgaben zu Abschnitt 4.3 | 95 |
| 4.4. Der Dualraum | 97 |
| <i>Linearformen, Dualraum, duale Basis, duale Abbildung, Transponierte einer Matrix</i> | |
| Aufgaben zu Abschnitt 4.4 | 101 |
| 5. Matrizenrechnung | 103 |
| 5.1. Zeilen- und Spaltenoperationen | 103 |
| <i>Zeilenoperationen, Zeilenstufenform, Gaußscher Algorithmus, Spaltenoperationen, Elementarmatrizen</i> | |
| Aufgaben zu Abschnitt 5.1 | 109 |
| 5.2. Der Rang einer Matrix | 111 |
| <i>Spaltenrang, Zeilenrang, Rang, Charakterisierungen von Invertierbarkeit, Rangbestimmung, Inversenberechnung</i> | |
| Aufgaben zu Abschnitt 5.2 | 117 |
| 5.3. Lineare Gleichungssysteme | 119 |
| <i>Lineare Gleichungssysteme, verschiedene Lösbarkeitskriterien, Lösungsverfahren</i> | |
| Aufgaben zu Abschnitt 5.3 | 125 |
| 6. Die Determinante | 127 |
| 6.1. Permutationen | 127 |
| <i>Permutationen, Symmetrische Gruppe, Transpositionen, Signum, Alternierende Gruppe</i> | |
| Aufgaben zu Abschnitt 6.1 | 131 |
| 6.2. Determinanten | 133 |
| <i>Determinante einer Matrix, Eigenschaften der Determinante, Determinantenmultiplikationssatz</i> | |

| | |
|---|-----|
| Aufgaben zu Abschnitt 6.2 | 137 |
| 6.3. Determinantenberechnung | 139 |
| <i>Determinante einer Dreiecksmatrix, komplementäre Matrix, Cramersche Regel, Laplacescher Entwicklungssatz</i> | |
| Aufgaben zu Abschnitt 6.3 | 145 |
| 7. Miscellanea | 147 |
| 7.1. Direkte Zerlegungen | 147 |
| <i>Summen, direkte Summen, lineare Projektionen, Fall zweier Untervektorräume</i> | |
| Aufgaben zu Abschnitt 7.1 | 153 |
| 7.2. Quotientenvektorräume | 155 |
| <i>Äquivalenzrelationen, Quotientenvektorräume, Homomorphiesatz, Dimensionsformel</i> | |
| Aufgaben zu Abschnitt 7.2 | 161 |
| 7.3. Basiswechsel | 163 |
| <i>Transformationsformeln für Koordinaten und darstellende Matrizen, Determinante eines Endomorphismus, Normalformenproblem</i> | |
| Aufgaben zu Abschnitt 7.3 | 167 |
| 8. Diagonalisierbarkeit | 169 |
| 8.1. Eigenwerte und Eigenvektoren | 169 |
| <i>Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume, Diagonalisierbarkeit</i> | |
| Aufgaben zu Abschnitt 8.1 | 173 |
| 8.2. Polynomring und Körper der rationalen Funktionen | 175 |
| <i>Polynomring, Division mit Rest, Integritätsringe, Quotientenkörper, Körper der rationalen Funktionen</i> | |
| Aufgaben zu Abschnitt 8.2 | 181 |
| 8.3. Charakteristisches Polynom und Diagonalisierbarkeit | 183 |
| <i>Charakteristisches Polynom, algebraische und geometrische Vielfachheiten, Charakterisierung der Diagonalisierbarkeit</i> | |
| Aufgaben zu Abschnitt 8.3 | 187 |
| 9. Euklidische und unitäre Vektorräume | 189 |
| 9.1. Euklidische Vektorräume | 189 |
| <i>Skalarprodukt, Norm, Länge, Winkel, Orthogonalität, Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, Dreiecksungleichung</i> | |
| Aufgaben zu Abschnitt 9.1 | 193 |
| 9.2. Orthonormalbasen | 195 |
| <i>Orthonormalbasen, Gram-Schmidt-Orthonormalisierung, orthogonale Zerlegung, Isometrien, orthogonale Matrizen</i> | |
| Aufgaben zu Abschnitt 9.2 | 199 |
| 9.3. Unitäre Vektorräume | 201 |
| <i>Hermiteische Skalarprodukte, Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, Gram-Schmidt-Orthonormalisierung, Isometrien, unitäre Matrizen.</i> | |

| | |
|---|-----|
| Aufgaben zu Abschnitt 9.3 | 207 |
| 9.4. Selbstadjungierte Endomorphismen | 209 |
| <i>Selbstadjungierte Endomorphismen, hermitesche und symmetrische Matrizen, Hauptachsentransformation</i> | |
| Aufgaben zu Abschnitt 9.4 | 213 |
| Index | 215 |