

## INHALTSVERZEICHNIS

1. Grundlagen	1
1.1. Logik und Beweisen	1
<i>Aussagen, logische Operationen und, oder, Negation, Implikation, Äquivalenz, Wahrheitstafeln, All- und Existenzaussagen</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 1.1	5
1.2. Mengen	7
<i>Cantorscher Mengenbegriff, Teilmengen, Vereinigung, Durchschnitt, Komplement, direktes Produkt, Familien</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 1.2	13
1.3. Abbildungen	15
<i>Abbildungen, Bild, Urbild, Komposition, injektiv, surjektiv, bijektiv, Umkehrabbildung</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 1.3	21
1.4. Ergänzungen zu 1.2 und 1.3	23
<i>Direktes Produkt und Projektionen, Graph einer Abbildung, Abbildungen endlicher Mengen</i>	
2. Etwas Algebra	25
2.1. Gruppen	25
<i>Verknüpfungen, neutrale und inverse Elemente, Gruppen, Gruppenhomomorphismen, Beispiel <math>\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}</math></i>	
Aufgaben zu Abschnitt 2.1	31
2.2. Ringe	33
<i>Ringe, Rechnen in kommutativen Ringen, Ringhomomorphismen, Einheiten, Beispiel <math>\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}</math></i>	
Aufgaben zu Abschnitt 2.2	39
2.3. Körper	41
<i>Körper, Körper der komplexen Zahlen, Körper <math>\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}</math>, lineare Gleichungssysteme über Körpern</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 2.3	45
3. Vektorräume	47
3.1. Vektorräume und Untervektorräume	47
<i>Vektorräume, <math>\mathbb{K}^n</math>, Untervektorräume, Durchschnitt von Untervektorräumen, Vektorräume von Abbildungen</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 3.1	53
3.2. Lineare Hülle und lineare (Un-)Abhängigkeit	55
<i>Linearkombinationen, lineare Hülle, lineare Abhängigkeit, lineare Unabhängigkeit</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 3.2	59
3.3. Basen und Koordinaten	61
<i>Erzeugendensysteme, Basen, Entwicklung nach einer Basis, Koordinaten, Vektorraum der Polynome</i>	

Aufgaben zu Abschnitt 3.3	67
3.4. Existenz von Basen und Dimension <i>Basisergänzungssatz, Austauschprinzip, Dimensionsbegriff</i>	69
Aufgaben zu Abschnitt 3.4	73
4. Lineare Abbildungen	75
4.1. Lineare Abbildungen <i>Lineare Abbildungen, Kern, Bild, Charakterisierung der Injektivität, Dimensionsformel und ihre Anwendungen</i>	75
Aufgaben zu Abschnitt 4.1	81
4.2. Matrizen <i>Matrizen, Matrix-Vektor-Multiplikation, Matrizenmultiplikation, Matrizenring, Invertierbarkeit</i>	83
Aufgaben zu Abschnitt 4.2	87
4.3. Lineare Abbildungen und Matrizen <i>Korrespondenz zwischen Matrizen und linearen Abbildungen, Vektorraum der linearen Abbildungen, Endomorphismenring</i>	89
Aufgaben zu Abschnitt 4.3	95
4.4. Der Dualraum <i>Linearformen, Dualraum, duale Basis, duale Abbildung, Transponierte einer Matrix</i>	97
Aufgaben zu Abschnitt 4.4	101
5. Matrizenrechnung	103
5.1. Zeilen- und Spaltenoperationen <i>Zeilenoperationen, Zeilenstufenform, Gaußscher Algorithmus, Spaltenoperationen, Elementarmatrizen</i>	103
Aufgaben zu Abschnitt 5.1	109
5.2. Der Rang einer Matrix <i>Spaltenrang, Zeilenrang, Rang, Charakterisierungen von Invertierbarkeit, Rangbestimmung, Inversenberechnung</i>	111
Aufgaben zu Abschnitt 5.2	117
5.3. Lineare Gleichungssysteme <i>Lineare Gleichungssysteme, verschiedene Lösbarkeitskriterien, Lösungsverfahren</i>	119
Aufgaben zu Abschnitt 5.3	125
6. Die Determinante	127
6.1. Permutationen <i>Permutationen, Symmetrische Gruppe, Transpositionen, Signum, Alternierende Gruppe</i>	127
Aufgaben zu Abschnitt 6.1	131
6.2. Determinanten <i>Determinante einer Matrix, Eigenschaften der Determinante, Determinantenmultiplikationssatz</i>	133

Aufgaben zu Abschnitt 6.2	137
6.3. Determinantenberechnung	139
<i>Determinante einer Dreiecksmatrix, komplementäre Matrix, Cramersche Regel, Laplacescher Entwicklungssatz</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 6.3	145
7. Miscellanea	147
7.1. Direkte Zerlegungen	147
<i>Summen, direkte Summen, lineare Projektionen, Fall zweier Untervektorräume</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 7.1	153
7.2. Quotientenvektorräume	155
<i>Äquivalenzrelationen, Quotientenvektorräume, Homomorphiesatz, Dimensionsformel</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 7.2	161
7.3. Basiswechsel	163
<i>Transformationsformeln für Koordinaten und darstellende Matrizen, Determinante eines Endomorphismus, Normalformenproblem</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 7.3	167
8. Diagonalisierbarkeit	169
8.1. Eigenwerte und Eigenvektoren	169
<i>Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume, Diagonalisierbarkeit</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 8.1	173
8.2. Polynomring und Körper der rationalen Funktionen	175
<i>Polynomring, Division mit Rest, Integritätsringe, Quotientenkörper, Körper der rationalen Funktionen</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 8.2	181
8.3. Charakteristisches Polynom und Diagonalisierbarkeit	183
<i>Charakteristisches Polynom, algebraische und geometrische Vielfachheiten, Charakterisierung der Diagonalisierbarkeit</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 8.3	187
9. Euklidische und unitäre Vektorräume	189
9.1. Euklidische Vektorräume	189
<i>Skalarprodukt, Norm, Länge, Winkel, Orthogonalität, Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, Dreiecksungleichung</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 9.1	193
9.2. Orthonormalbasen	195
<i>Orthonormalbasen, Gram-Schmidt-Orthonormalisierung, orthogonale Zerlegung, Isometrien, orthogonale Matrizen</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 9.2	199
9.3. Unitäre Vektorräume	201
<i>Hermitesche Skalarprodukte, Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, Gram-Schmidt-Orthonormalisierung, Isometrien, unitäre Matrizen.</i>	

Aufgaben zu Abschnitt 9.3	207
9.4. Selbstadjungierte Endomorphismen	209
<i>Selbstadjungierte Endomorphismen, hermitesche und symmetrische Matrizen, Hauptachsentransformation</i>	
Aufgaben zu Abschnitt 9.4	213
Index	215