

# Inhalt

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>0</b> | <b>Lineare Geometrie im <math>n</math>-dimensionalen reellen Raum</b> | <b>1</b>  |
| 0.1      | Der $n$ -dimensionale reelle Raum                                     | 1         |
| 0.1.1    | Zahlen  | 1         |
| 0.1.2    | Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$   | 7         |
| 0.1.3    | Multiplikation von Vektoren   | 11        |
| 0.2      | Geraden   | 12        |
| 0.2.1    | Ausblick  | 12        |
| 0.2.2    | Geraden im $\mathbb{R}^n$   | 12        |
| 0.2.3    | Geraden in der Ebene  | 16        |
| 0.3      | Abstände und Winkel   | 20        |
| 0.3.1    | Das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$                                   | 20        |
| 0.3.2    | Anwendungen in der Elementargeometrie                                 | 22        |
| 0.3.3    | Winkel im $\mathbb{R}^n$  | 26        |
| 0.3.4    | Senkrechte Vektoren und Abstände                                      | 33        |
| 0.3.5    | Die HESSEsche Normalform einer Geradengleichung                       | 35        |
| 0.3.6    | Lineare Unabhängigkeit  | 38        |
| 0.3.7    | Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$                                   | 41        |
| 0.3.8    | Abstand von Geraden   | 45        |
| 0.4      | Ebenen  | 50        |
| 0.4.1    | Ebenen im $\mathbb{R}^n$  | 50        |
| 0.4.2    | Ebenen im $\mathbb{R}^3$  | 54        |
| 0.4.3    | Abstand eines Punktes von einer Ebene                                 | 58        |
| 0.4.4    | Das Spatprodukt   | 60        |
| 0.5      | Lineare Gleichungssysteme   | 63        |
| 0.5.1    | Zwei Geraden in der Ebene   | 63        |
| 0.5.2    | Beschreibung durch Matrizen   | 65        |
| 0.5.3    | Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform                               | 66        |
| 0.5.4    | Das Eliminationsverfahren nach GAUSS                                  | 72        |
| 0.5.5    | Wahl des Pivots und Rundungsfehler                                    | 76        |
| <b>1</b> | <b>Grundlagen</b>   | <b>79</b> |
| 1.1      | Mengen, Relationen, Abbildungen                                       | 79        |
| 1.1.1    | Mengen und Teilmengen   | 79        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 1.1.2    | Operationen mit Mengen . . . . .                          | 81         |
| 1.1.3    | Abbildungen . . . . .                                     | 83         |
| 1.1.4    | Abzählbare Mengen . . . . .                               | 87         |
| 1.1.5    | Äquivalenzrelationen . . . . .                            | 91         |
| 1.2      | Halbgruppen und Gruppen . . . . .                         | 96         |
| 1.2.1    | Die natürlichen Zahlen* . . . . .                         | 96         |
| 1.2.2    | Verknüpfungen und Halbgruppen . . . . .                   | 101        |
| 1.2.3    | Gruppen . . . . .   | 103        |
| 1.2.4    | Die ganzen Zahlen als additive Gruppe* . . . . .          | 106        |
| 1.2.5    | Untergruppen und Homomorphismen . . . . .                 | 110        |
| 1.3      | Ringe und Körper . . . . .                                | 112        |
| 1.3.1    | Die ganzen Zahlen als Ring . . . . .                      | 112        |
| 1.3.2    | Der Körper der rationalen Zahlen . . . . .                | 117        |
| 1.3.3    | Dezimalbruchentwicklung rationaler Zahlen* . . . . .      | 124        |
| 1.3.4    | Konstruktion der reellen Zahlen* . . . . .                | 128        |
| 1.3.5    | Reelle Zahlen als Dezimalbrüche* . . . . .                | 136        |
| 1.3.6    | Komplexe Zahlen . . . . .                                 | 141        |
| 1.3.7    | Endliche Körper* . . . . .                                | 147        |
| 1.3.8    | Rückblick und Ausblick . . . . .                          | 153        |
| 1.4      | Polynome . . . . .  | 155        |
| 1.4.1    | Polynome und Polynomfunktionen . . . . .                  | 155        |
| 1.4.2    | Der Ring der Polynome . . . . .                           | 156        |
| 1.4.3    | Division mit Rest . . . . .                               | 158        |
| 1.4.4    | Nullstellen von Polynomen . . . . .                       | 159        |
| 1.4.5    | Eine Vorzeichenregel für reelle Polynome . . . . .        | 163        |
| 1.4.6    | Der Fundamentalsatz der Algebra . . . . .                 | 164        |
| <b>2</b> | <b>Vektorräume und lineare Abbildungen</b>                | <b>171</b> |
| 2.1      | Grundlagen . . . . .                                      | 172        |
| 2.1.1    | Vektorräume . . . . .                                     | 172        |
| 2.1.2    | Untervektorräume . . . . .                                | 175        |
| 2.1.3    | Operationen mit Untervektorräumen . . . . .               | 176        |
| 2.1.4    | Lineare Unabhängigkeit . . . . .                          | 179        |
| 2.2      | Basis und Dimension . . . . .                             | 186        |
| 2.2.1    | Erzeugendensysteme und Basen . . . . .                    | 186        |
| 2.2.2    | Dimension eines Vektorraums . . . . .                     | 189        |
| 2.2.3    | Charakterisierungen einer Basis . . . . .                 | 193        |
| 2.2.4    | Praktische Verfahren zur Bestimmung einer Basis . . . . . | 196        |
| 2.2.5    | Summen und direkte Summen . . . . .                       | 200        |
| 2.2.6    | Der Rang einer Matrix . . . . .                           | 204        |
| 2.3      | Lineare Abbildungen . . . . .                             | 210        |
| 2.3.1    | Definitionen und Beispiele . . . . .                      | 210        |
| 2.3.2    | Elementare Eigenschaften linearer Abbildungen . . . . .   | 214        |
| 2.3.3    | Spezielle lineare Abbildungen . . . . .                   | 217        |
| 2.3.4    | Eine Dimensionsformel für lineare Abbildungen . . . . .   | 221        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 2.3.5    | Lineare Gleichungssysteme . . . . .                             | 223        |
| 2.3.6    | Quotientenvektorräume . . . . .                                 | 228        |
| 2.4      | Lineare Abbildungen und Matrizen . . . . .                      | 234        |
| 2.4.1    | Erzeugung linearer Abbildungen . . . . .                        | 234        |
| 2.4.2    | Die darstellende Matrix einer linearen Abbildung . . . . .      | 236        |
| 2.4.3    | Multiplikation von Matrizen . . . . .                           | 240        |
| 2.4.4    | Rechenregeln für Matrizen . . . . .                             | 245        |
| 2.4.5    | Die allgemeine lineare Gruppe . . . . .                         | 249        |
| 2.4.6    | Elementarmatrizen . . . . .                                     | 251        |
| 2.4.7    | Lineare Gleichungssysteme und Elementarmatrizen . . . . .       | 258        |
| 2.5      | Transformationen . . . . .                                      | 260        |
| 2.5.1    | Basistransformationen und Koordinatentransformationen . . . . . | 260        |
| 2.5.2    | Transformationsformel für lineare Abbildungen . . . . .         | 263        |
| 2.5.3    | Eine Normalform für darstellende Matrizen . . . . .             | 265        |
| <b>3</b> | <b>Determinanten</b> . . . . .                                  | <b>269</b> |
| 3.1      | Motivation . . . . .  | 269        |
| 3.1.1    | Lineare Gleichungssysteme . . . . .                             | 269        |
| 3.1.2    | Flächeninhalt und Orientierung . . . . .                        | 270        |
| 3.2      | Berechnung von Determinanten . . . . .                          | 275        |
| 3.2.1    | Axiome für Determinanten . . . . .                              | 275        |
| 3.2.2    | Weitere Eigenschaften der Determinante . . . . .                | 278        |
| 3.2.3    | Permutationen . . . . .   | 285        |
| 3.2.4    | Die alternierende Gruppe . . . . .                              | 291        |
| 3.2.5    | Existenz und Eindeutigkeit . . . . .                            | 292        |
| 3.3      | Minoren . . . . .   | 297        |
| 3.3.1    | Die komplementäre Matrix . . . . .                              | 297        |
| 3.3.2    | LAPLACE-Entwicklung . . . . .                                   | 299        |
| 3.3.3    | Die CRAMERSche Regel . . . . .                                  | 300        |
| <b>4</b> | <b>Eigenwerte</b> . . . . .                                     | <b>301</b> |
| 4.1      | Grundbegriffe . . . . .   | 301        |
| 4.1.1    | Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .                          | 301        |
| 4.1.2    | Endomorphismen des $\mathbb{R}^2$ . . . . .                     | 304        |
| 4.1.3    | Differentialgleichungen . . . . .                               | 306        |
| 4.1.4    | Das charakteristische Polynom . . . . .                         | 311        |
| 4.2      | Diagonalisierung und Trigonalisierung . . . . .                 | 315        |
| 4.2.1    | Diagonalisierbarkeit . . . . .                                  | 315        |
| 4.2.2    | Geometrische und algebraische Vielfachheit . . . . .            | 317        |
| 4.2.3    | Rechenverfahren zur Diagonalisierung . . . . .                  | 321        |
| 4.2.4    | Trigonalisierung* . . . . .                                     | 323        |
| 4.2.5    | Zerlegung in Haupträume* . . . . .                              | 329        |
| 4.2.6    | Nilpotente Endomorphismen* . . . . .                            | 335        |
| 4.2.7    | Die JORDANSche Normalform* . . . . .                            | 340        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>5</b> | <b>Bilineare Algebra und Geometrie</b>                          | <b>343</b> |
| 5.1      | Kegelschnitte . . . . .   | 343        |
| 5.1.1    | Die Gleichungen der ebenen Schnitte eines Kreiskegels . . . . . | 343        |
| 5.1.2    | Geometrische Eigenschaften der Kegelschnitte . . . . .          | 346        |
| 5.2      | Bilinearformen . . . . .  | 351        |
| 5.2.1    | Definitionen und beschreibende Matrix . . . . .                 | 351        |
| 5.2.2    | Transformationsformel für darstellende Matrizen . . . . .       | 353        |
| 5.2.3    | Entartung und Rang einer Bilinearform . . . . .                 | 354        |
| 5.2.4    | Diagonalisierung einer symmetrischen Bilinearform . . . . .     | 356        |
| 5.2.5    | Das Trägheitsgesetz von SYLVESTER . . . . .                     | 360        |
| 5.2.6    | Exkurs über affine Geometrie . . . . .                          | 363        |
| 5.2.7    | Quadriken . . . . .   | 367        |
| 5.3      | Euklidische und unitäre Vektorräume . . . . .                   | 380        |
| 5.3.1    | Hermiteische Formen . . . . .                                   | 380        |
| 5.3.2    | Definitheit . . . . .   | 381        |
| 5.3.3    | Orthogonalität . . . . .  | 387        |
| 5.3.4    | Orthogonale und unitäre Endomorphismen . . . . .                | 391        |
| 5.3.5    | Selbstadjungierte Endomorphismen . . . . .                      | 399        |
| 5.3.6    | Hauptachsentransformation von Quadriken . . . . .               | 403        |
| 5.3.7    | Ausblick . . . . .  | 413        |
|          | <b>Literaturverzeichnis</b>                                     | <b>415</b> |
|          | <b>Index</b>  | <b>417</b> |
|          | <b>Symbolverzeichnis</b>  | <b>423</b> |