

# Inhalt

<b>0</b>	<b>Lineare Geometrie im <math>n</math>-dimensionalen reellen Raum</b>	<b>1</b>
0.1	Der $n$ -dimensionale reelle Raum . . . . .	1
0.1.1	Zahlen . . . . .	1
0.1.2	Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ . . . . .	7
0.1.3	Multiplikation von Vektoren . . . . .	11
0.2	Geraden . . . . .	12
0.2.1	Ausblick . . . . .	12
0.2.2	Geraden im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	12
0.2.3	Geraden in der Ebene . . . . .	16
0.3	Abstände und Winkel . . . . .	20
0.3.1	Das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	20
0.3.2	Anwendungen in der Elementargeometrie . . . . .	22
0.3.3	Winkel im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	26
0.3.4	Senkrechte Vektoren und Abstände . . . . .	33
0.3.5	Die HESSEsche Normalform einer Geradengleichung . . . . .	35
0.3.6	Lineare Unabhängigkeit . . . . .	38
0.3.7	Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	41
0.3.8	Abstand von Geraden . . . . .	45
0.4	Ebenen . . . . .	50
0.4.1	Ebenen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	50
0.4.2	Ebenen im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	54
0.4.3	Abstand eines Punktes von einer Ebene . . . . .	58
0.4.4	Das Spatprodukt . . . . .	60
0.5	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	63
0.5.1	Zwei Geraden in der Ebene . . . . .	63
0.5.2	Beschreibung durch Matrizen . . . . .	65
0.5.3	Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform . . . . .	66
0.5.4	Das Eliminationsverfahren nach GAUSS . . . . .	72
0.5.5	Wahl des Pivots und Rundungsfehler . . . . .	76
<b>1</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>79</b>
1.1	Mengen, Relationen, Abbildungen . . . . .	79
1.1.1	Mengen und Teilmengen . . . . .	79

1.1.2	Operationen mit Mengen . . . . .	81
1.1.3	Abbildungen . . . . .	83
1.1.4	Abzählbare Mengen . . . . .	87
1.1.5	Äquivalenzrelationen . . . . .	91
1.2	Halbgruppen und Gruppen . . . . .	96
1.2.1	Die natürlichen Zahlen* . . . . .	96
1.2.2	Verknüpfungen und Halbgruppen . . . . .	101
1.2.3	Gruppen . . . . .	103
1.2.4	Die ganzen Zahlen als additive Gruppe* . . . . .	106
1.2.5	Untergruppen und Homomorphismen . . . . .	110
1.3	Ringe und Körper . . . . .	112
1.3.1	Die ganzen Zahlen als Ring . . . . .	112
1.3.2	Der Körper der rationalen Zahlen . . . . .	117
1.3.3	Dezimalbruchentwicklung rationaler Zahlen* . . . . .	124
1.3.4	Konstruktion der reellen Zahlen* . . . . .	128
1.3.5	Reelle Zahlen als Dezimalbrüche* . . . . .	136
1.3.6	Komplexe Zahlen . . . . .	141
1.3.7	Endliche Körper* . . . . .	147
1.3.8	Rückblick und Ausblick . . . . .	153
1.4	Polynome . . . . .	155
1.4.1	Polynome und Polynomfunktionen . . . . .	155
1.4.2	Der Ring der Polynome . . . . .	156
1.4.3	Division mit Rest . . . . .	158
1.4.4	Nullstellen von Polynomen . . . . .	159
1.4.5	Eine Vorzeichenregel für reelle Polynome . . . . .	163
1.4.6	Der Fundamentalsatz der Algebra . . . . .	164
<b>2</b>	<b>Vektorräume und lineare Abbildungen</b>	<b>171</b>
2.1	Grundlagen . . . . .	172
2.1.1	Vektorräume . . . . .	172
2.1.2	Untervektorräume . . . . .	175
2.1.3	Operationen mit Untervektorräumen . . . . .	176
2.1.4	Lineare Unabhängigkeit . . . . .	179
2.2	Basis und Dimension . . . . .	186
2.2.1	Erzeugendensysteme und Basen . . . . .	186
2.2.2	Dimension eines Vektorraums . . . . .	189
2.2.3	Charakterisierungen einer Basis . . . . .	193
2.2.4	Praktische Verfahren zur Bestimmung einer Basis . . . . .	196
2.2.5	Summen und direkte Summen . . . . .	200
2.2.6	Der Rang einer Matrix . . . . .	204
2.3	Lineare Abbildungen . . . . .	210
2.3.1	Definitionen und Beispiele . . . . .	210
2.3.2	Elementare Eigenschaften linearer Abbildungen . . . . .	214
2.3.3	Spezielle lineare Abbildungen . . . . .	217
2.3.4	Eine Dimensionsformel für lineare Abbildungen . . . . .	221

2.3.5	Lineare Gleichungssysteme	223
2.3.6	Quotientenvektorräume	228
2.4	Lineare Abbildungen und Matrizen	234
2.4.1	Erzeugung linearer Abbildungen	234
2.4.2	Die darstellende Matrix einer linearen Abbildung	236
2.4.3	Multiplikation von Matrizen	240
2.4.4	Rechenregeln für Matrizen	245
2.4.5	Die allgemeine lineare Gruppe	249
2.4.6	Elementarmatrizen	251
2.4.7	Lineare Gleichungssysteme und Elementarmatrizen	258
2.5	Transformationen	260
2.5.1	Basistransformationen und Koordinatentransformationen	260
2.5.2	Transformationsformel für lineare Abbildungen	263
2.5.3	Eine Normalform für darstellende Matrizen	265
<b>3</b>	<b>Determinanten</b>	<b>269</b>
3.1	Motivation	269
3.1.1	Lineare Gleichungssysteme	269
3.1.2	Flächeninhalt und Orientierung	270
3.2	Berechnung von Determinanten	275
3.2.1	Axiome für Determinanten	275
3.2.2	Weitere Eigenschaften der Determinante	278
3.2.3	Permutationen	285
3.2.4	Die alternierende Gruppe	291
3.2.5	Existenz und Eindeutigkeit	292
3.3	Minoren	297
3.3.1	Die komplementäre Matrix	297
3.3.2	LAPLACE-Entwicklung	299
3.3.3	Die CRAMERSche Regel	300
<b>4</b>	<b>Eigenwerte</b>	<b>301</b>
4.1	Grundbegriffe	301
4.1.1	Eigenwerte und Eigenvektoren	301
4.1.2	Endomorphismen des $\mathbb{R}^2$	304
4.1.3	Differentialgleichungen	306
4.1.4	Das charakteristische Polynom	311
4.2	Diagonalisierung und Trigonaisierung	315
4.2.1	Diagonalisierbarkeit	315
4.2.2	Geometrische und algebraische Vielfachheit	317
4.2.3	Rechenverfahren zur Diagonalisierung	321
4.2.4	Trigonaisierung*	323
4.2.5	Zerlegung in Haupträume*	329
4.2.6	Nilpotente Endomorphismen*	335
4.2.7	Die JORDANSche Normalform*	340

<b>5 Bilineare Algebra und Geometrie</b>	<b>343</b>
5.1 Kegelschnitte . . . . .	343
5.1.1 Die Gleichungen der ebenen Schnitte eines Kreiskegels . . . . .	343
5.1.2 Geometrische Eigenschaften der Kegelschnitte . . . . .	346
5.2 Bilinearformen . . . . .	351
5.2.1 Definitionen und beschreibende Matrix . . . . .	351
5.2.2 Transformationsformel für darstellende Matrizen . . . . .	353
5.2.3 Entartung und Rang einer Bilinearform . . . . .	354
5.2.4 Diagonalisierung einer symmetrischen Bilinearform . . . . .	356
5.2.5 Das Trägheitsgesetz von SYLVESTER . . . . .	360
5.2.6 Exkurs über affine Geometrie . . . . .	363
5.2.7 Quadriken . . . . .	367
5.3 Euklidische und unitäre Vektorräume . . . . .	380
5.3.1 Hermitesche Formen . . . . .	380
5.3.2 Definitheit . . . . .	381
5.3.3 Orthogonalität . . . . .	387
5.3.4 Orthogonale und unitäre Endomorphismen . . . . .	391
5.3.5 Selbstadjungierte Endomorphismen . . . . .	399
5.3.6 Hauptachsentransformation von Quadriken . . . . .	403
5.3.7 Ausblick . . . . .	413
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>415</b>
<b>Index</b>	<b>417</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>423</b>