

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| Vorwort | v |
| | |
| I Grundlagen | 1 |
| 1 Modelle und ihre Anwendung | 3 |
| 1.1 Modelle sind überall | 3 |
| 1.2 Modelle in der Wissenschaft | 5 |
| 1.3 Mathematische Modelle - ein Ausflug | 10 |
| 1.3.1 Wohin wollen wir fahren? | 11 |
| 1.3.2 Wann ist das Wetter günstig? | 13 |
| 1.3.3 Wo kommt unser Auto her? | 15 |
| 1.3.4 Wie finden wir den Weg? | 16 |
| 1.3.5 Wie wird der Verkehr geregelt? | 17 |
| 2 Modellierung des Freiwurfs beim Basketball | 21 |
| 2.1 Erstes Modell: Der beste Abwurfwinkel | 22 |
| 2.1.1 Analyse des Anwendungsproblems | 22 |
| 2.1.2 Herleitung eines mathematischen Modells | 24 |
| 2.1.3 Lösen des mathematischen Problems: Implementierung und Simulation | 30 |
| 2.1.4 Interpretation der Ergebnisse und Verfeinerung des Modells | 36 |
| 2.2 Zweites Modell: Die beste Wurfbahn | 37 |
| 2.2.1 Analyse des Problems: Bestimmung des zulässigen Gebietes | 38 |
| 2.2.2 Mathematisches Modell: Mehrzieloptimierung | 43 |
| 2.2.3 Lösung, Auswertung und Interpretation | 45 |
| 2.2.4 Analyse der Ergebnisse | 47 |
| 2.3 Aufgaben | 48 |
| 3 Methodik der mathematischen Modellierung | 51 |
| 3.1 Modellierungszyklus | 52 |
| 3.2 Analyse des Anwendungsproblems | 53 |
| 3.2.1 Präzisierung der Fragestellung | 54 |
| 3.2.2 Annahmen | 55 |
| 3.3 Modellbildung | 56 |
| 3.3.1 System- und Modellparameter | 57 |
| 3.3.2 Zustandsgrößen und gesuchte Größen | 58 |
| 3.3.3 Nebenbedingungen und bekannte Gesetzmäßigkeiten | 59 |
| 3.3.4 Formulierung einer mathematischen Aufgabenstellung | 60 |
| 3.4 Mathematische Analyse des Modells | 60 |
| 3.5 Computergestützte Berechnungen und Simulationen | 64 |
| 3.6 Interpretation und Validierung | 65 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 3.6.1 | Validierung der Berechnung der Lösung | 65 |
| 3.6.2 | Interpretation der Ergebnisse und Validierung des Modells | 66 |
| 3.7 | Modelltypen – Modellklassifikation | 68 |
| 3.7.1 | Mathematische Strukturen und Methoden | 70 |
| 3.7.2 | Gruppierung nach Phänomenen | 73 |
| 3.7.3 | Modellierungsziele | 75 |
| 3.7.4 | Beschreibungsebene | 76 |
| 3.8 | Aufgaben | 77 |
| II | Werkzeuge | 79 |
| 4 | Prinzipien zur Formulierung eines Modells | 81 |
| 4.1 | Erhaltungssätze und Bilanzgleichungen | 82 |
| 4.1.1 | Systembilanzgleichungen | 82 |
| 4.1.2 | Erhaltungsgrößen und Erhaltungssätze | 85 |
| 4.1.3 | Lokale Bilanzgleichungen | 101 |
| 4.2 | Zustände und Übergänge | 109 |
| 4.2.1 | Diskrete deterministische Übergänge | 110 |
| 4.2.2 | Stochastische Übergänge – Stochastische Prozesse | 119 |
| 4.2.3 | Zelluläre Automaten | 124 |
| 4.2.4 | Kontinuierliche Übergänge | 128 |
| 4.3 | Einmal vom Mikroskopischen zum Makroskopischen und zurück | 131 |
| 4.3.1 | Modell des idealen Gases | 132 |
| 4.3.2 | Fouriersches Gesetz der Wärmeleitung | 135 |
| 4.3.3 | Random-Walk-Modell der Diffusion | 137 |
| 4.4 | Aufgaben | 141 |
| 5 | Mathematische Analyse von Modellen | 147 |
| 5.1 | Lösbarkeit | 147 |
| 5.1.1 | Lineare und nichtlineare Gleichungen | 147 |
| 5.1.2 | Differentialgleichungen | 151 |
| 5.1.3 | Inverse und schlecht gestellte Probleme | 153 |
| 5.2 | Dimensionsanalyse | 160 |
| 5.2.1 | Einheiten und Dimensionen | 161 |
| 5.2.2 | Entdimensionalisierung und Skalierung | 162 |
| 5.2.3 | Modellreduktion durch Dimensionsanalyse | 168 |
| 5.3 | Linearisierung | 169 |
| 5.4 | Störungstheorie und asymptotische Entwicklung | 175 |
| 5.5 | Stationäre Zustände, Stabilität und asymptotisches Verhalten | 177 |
| 5.5.1 | Diskrete lineare dynamische Systeme | 179 |
| 5.5.2 | Diskrete nichtlineare dynamische Systeme | 184 |

| | | |
|------------|--|------------|
| 5.5.3 | Markov-Ketten | 186 |
| 5.5.4 | Kontinuierliche lineare dynamische Systeme | 188 |
| 5.5.5 | Kontinuierliche nichtlineare dynamische Systeme | 190 |
| 5.6 | Aufgaben | 194 |
| 6 | Berechnung, Simulation und Visualisierung | 197 |
| 6.1 | Diskrete dynamische Systeme | 199 |
| 6.2 | Kontinuierliche dynamische Systeme | 202 |
| 6.3 | Partielle Differentialgleichungen | 214 |
| 6.3.1 | Eindimensionale Konvektions-Reaktions-Gleichung | 215 |
| 6.3.2 | Dreidimensionale Transportgleichung | 221 |
| 6.4 | Aufgaben | 226 |
| III | Fallstudien | 229 |
| 7 | Informationssuche im Web: Google's PageRank | 231 |
| 7.1 | Von der Link-Struktur zum PageRank | 234 |
| 7.2 | Zufalls-Surfer und Markov-Ketten | 237 |
| 7.3 | Lösungsstrategie und Sensitivitätsanalyse | 244 |
| 7.3.1 | Berechnung des PageRanks mit der Vektoriteration | 245 |
| 7.3.2 | Konvergenzgeschwindigkeit und Wahl des Parameters α | 246 |
| 7.3.3 | Sensitivitätsanalyse | 249 |
| 7.4 | Berechnung des PageRank-Vektors | 251 |
| 7.5 | Diskussion und Ausblick | 254 |
| 7.6 | Aufgaben | 256 |
| 8 | Fischbestände und optimale Fangquoten | 257 |
| 8.1 | Einfache Modelle der Entwicklung von Fischbeständen | 259 |
| 8.2 | Optimale Fischfangquoten | 263 |
| 8.3 | Räuber-Beute-Modelle | 266 |
| 8.4 | Ausblick auf weitere Modelle | 272 |
| 8.5 | Aufgaben | 276 |
| 9 | Schadstoffausbreitung in einem Gewässer | 279 |
| 9.1 | Konvektion und Abbau in einem Fluss | 281 |
| 9.2 | Konvektion, Diffusion und Abbau in einem flachen See | 287 |
| 9.3 | Drei Dimensionen und andere Verallgemeinerungen | 294 |
| 9.4 | Aufgaben | 297 |

| | | |
|----------|--|-----|
| A | MATLAB®-Tutorial | 299 |
| A.1 | Grundlagen | 299 |
| A.1.1 | Die Benutzeroberfläche | 300 |
| A.1.2 | Matrizen als grundlegende Datenstruktur | 300 |
| A.1.3 | Rechnen mit Matrizen | 303 |
| A.1.4 | Aufruf von eingebauten MATLAB-Funktionen | 305 |
| A.2 | Programmieren in MATLAB | 307 |
| A.2.1 | Skripte und Funktionen | 307 |
| A.2.2 | Kontrollstrukturen | 310 |
| A.2.3 | Function Handle | 312 |
| A.2.4 | Programmierstil | 313 |
| A.2.5 | Effiziente Berechnungen | 316 |
| A.3 | Grafische Darstellung | 318 |
| A.3.1 | Linien und Punkte | 318 |
| A.3.2 | Animierte Darstellung | 319 |
| A.3.3 | Grafische Darstellung von Flächen | 321 |
| A.3.4 | Vektorfelder | 322 |
| | Literaturverzeichnis | 325 |
| | Index | 329 |