

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen – Töne und Intervalle	1
1.1	Wer kocht, braucht Zutaten... – eine Einleitung	1
1.2	Töne: Schwingungen, Schwebungen und Monochordium	6
1.3	Intervalle und Frequenzmaß, Viertönesatz und diatonisches Prinzip	16
1.4	Die Intervall-Adjunktion und ihre Arithmetik	23
1.5	Das Centmaß für Intervalle	31
1.6	Musikalische Mittelwerte und harmonische Teilung	36
1.7	Gradus suavitatis – Konsonanz und Primzahlen	43
1.8	Die Mathematik der Intervall-Iterationen: „Graue Theorie“	46
1.9	Das Tonspiralen-Modell	57
2	Algebraische Strukturtheorie in der Diatonik und Chromatik	61
2.1	Einleitung: Der Fragenkreis im Quintenkreis	61
2.2	Bilanz-Gleichungen und Elementarintervalle quintgenerierter Skalen	63
2.3	Die Dur-Tonleiter und die quintgenerierte Diatonik	68
2.4	Die Wolfsquinte und die quintgenerierte Chromatik	71
2.5	Die Tonartencharakteristik: Einbettung der Diatonik in die Chromatik	82
2.6	Cent-Schnellrechnung für Iterationsskalen	87
3	Das pythagoräische Tonsystem	91
3.1	Einleitung: Das pythagoräische System in historischem Licht	91
3.2	Pythagoräische Diatonik und Chromatik	97
3.3	Pythagoräisches Komma und die Tonspiralen	100
3.4	Pythagoräische Epsilontik	106
4	Das natürlich-harmonische System	111
4.1	Einleitung: Rein gleich unrein	111
4.2	Das Tongitter von Leonhard Euler	115
4.3	Die reinen Skalen: Diatonisch, chromatisch, enharmonisch und exotisch	117
4.4	Die Welt der Kommata: Die Gleichungen der Harmonie	125
4.5	Abstrakte Komma-Arithmetik: Eine musikalische Vektorrechnung	133

4.6 Primzahl – Tonsysteme: Das multiple Euler-Gitter	138
4.7 Superpartikuläre Intervalle und die antike Konsonanz	141
4.8 Terzen-Musik: Die „exotische Skala der Terz-Iteration“	160
5 Mitteltönigkeit	163
5.1 Einleitung: Der Bruch mit der Antike	163
5.2 Mitteltönigkeit und Dur-Terz-Prinzip	166
5.3 Mitteltönigkeit und Moll-Terz-Prinzip	172
5.4 Die 1/5-Komma-Stimmung und ihre vielen Cousinsen	175
5.5 „Mitteltönige mathematische Spiele“	179
6 Historische Temperaturen	185
6.1 Einleitung: Temperierung – ein Optimierungsproblem?	185
6.2 Henri Arnault de Zwolle: Der Pythagoräiker	187
6.3 Arnold Schlick: Mitteltönigkeit fast pur	188
6.4 Leonhard Euler und Johannes Kepler: Auswahlsysteme im reinen Gitter	190
6.5 Johann Philipp Kirnberger: Das geniale Auswahlsystem	192
6.6 Andreas Werckmeister: Meister der Ausgleichung	197
6.7 Gioseffo Zarlino: Neue Quinten mit Komma-Siebtel	200
6.8 Gottfried Silbermann: Der gespiegelte Pythagoras	204
7 Gleichstufige Temperierung ETS	211
7.1 Einleitung: Über die Gleichberechtigung im Reich der Töne	211
7.2 Die gleichstufigen Skalen	213
7.3 Kombinatorik und Algebra der Gleichstufigkeit	218
7.4 Daniel Strähle und seine merkwürdig-geniale Gitarren-Stimmung	223
7.5 Dynamik der Gleichstufigkeit: Christoph Gottlieb Schröter und die moderne Eigenwerttheorie	228
8 Analytische Theorie der Iterationsskalen	233
8.1 Einleitung: Mathematik im Reich der Töne	233
8.2 Modelle der Intervalliterationen	236
8.3 Der Reoktavierungs-Operator	241
8.4 Periodische Iterationen und nicht-periodische Iterationen	248
8.5 Kombinatorische Spiele in der Tonspirale	252
8.6 Die Eulersche Cent-Funktion: Töne = Winkel = Zahlen	256
8.7 Der Tonverteilungssatz – Das Theorem von Levy-Poincaré	263
Nachwort	273
Literatur	275
Stichwortverzeichnis	277