

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen – Töne und Intervalle	1
1.1 Wer kocht, braucht Zutaten... – eine Einleitung	1
1.2 Töne: Schwingungen, Schwebungen und Monochordium	6
1.3 Intervalle und Frequenzmaß, Viertönesatz und diatonisches Prinzip	16
1.4 Die Intervall-Adjunktion und ihre Arithmetik	23
1.5 Das Centmaß für Intervalle	31
1.6 Musikalische Mittelwerte und harmonische Teilung	36
1.7 Gradus suavitatis – Konsonanz und Primzahlen	43
1.8 Die Mathematik der Intervall-Iterationen: „Graue Theorie“	46
1.9 Das Tonspiralen-Modell	57
2 Algebraische Strukturtheorie in der Diatonik und Chromatik	61
2.1 Einleitung: Der Fragenkreis im Quintenkreis	61
2.2 Bilanz-Gleichungen und Elementarintervalle quintgenerierter Skalen	63
2.3 Die Dur-Tonleiter und die quintgenerierte Diatonik	68
2.4 Die Wolfsquinte und die quintgenerierte Chromatik	71
2.5 Die Tonartencharakteristik: Einbettung der Diatonik in die Chromatik	82
2.6 Cent-Schnellrechnung für Iterationsskalen	87
3 Das pythagoräische Tonsystem	91
3.1 Einleitung: Das pythagoräische System in historischem Licht	91
3.2 Pythagoräische Diatonik und Chromatik	97
3.3 Pythagoräisches Komma und die Tonspirale	100
3.4 Pythagoräische Epsilontik	106
4 Das natürlich-harmonische System	111
4.1 Einleitung: Rein gleich unrein	111
4.2 Das Tongitter von Leonhard Euler	115
4.3 Die reinen Skalen: Diatonisch, chromatisch, enharmonisch und exotisch	117
4.4 Die Welt der Kommata: Die Gleichungen der Harmonie	125
4.5 Abstrakte Komma-Arithmetik: Eine musikalische Vektorrechnung	133

XVII

4.6	Primzahl – Tonsysteme: Das multiple Euler-Gitter	138
4.7	Superpartikulare Intervalle und die antike Konsonanz.	141
4.8	Terzen-Musik: Die „exotische Skala der Terz-Iteration“	160
5	Mitteltönigkeit	163
5.1	Einleitung: Der Bruch mit der Antike	163
5.2	Mitteltönigkeit und Dur-Terz-Prinzip.	166
5.3	Mitteltönigkeit und Moll-Terz-Prinzip.	172
5.4	Die 1/5-Komma-Stimmung und ihre vielen Cousins.	175
5.5	„Mitteltönige mathematische Spiele“	179
6	Historische Temperaturen	185
6.1	Einleitung: Temperierung – ein Optimierungsproblem?	185
6.2	Henri Arnault de Zwolle: Der Pythagoräer	187
6.3	Arnold Schlick: Mitteltönigkeit fast pur	188
6.4	Leonhard Euler und Johannes Kepler: Auswahlssysteme im reinen Gitter	190
6.5	Johann Philipp Kirnberger: Das geniale Auswahlssystem.	192
6.6	Andreas Werckmeister: Meister der Ausgleichung	197
6.7	Gioseffo Zarlino: Neue Quinten mit Komma-Siebtel	200
6.8	Gottfried Silbermann: Der gespiegelte Pythagoras	204
7	Gleichstufige Temperierung ETS	211
7.1	Einleitung: Über die Gleichberechtigung im Reich der Töne	211
7.2	Die gleichstufigen Skalen.	213
7.3	Kombinatorik und Algebra der Gleichstufigkeit	218
7.4	Daniel Strähle und seine merkwürdig-geniale Gitarren-Stimmung	223
7.5	Dynamik der Gleichstufigkeit: Christoph Gottlieb Schröter und die moderne Eigenwerttheorie	228
8	Analytische Theorie der Iterationsskalen	233
8.1	Einleitung: Mathematik im Reich der Töne.	233
8.2	Modelle der Intervalliterationen.	236
8.3	Der Reoktavierungs-Operator	241
8.4	Periodische Iterationen und nicht-periodische Iterationen.	248
8.5	Kombinatorische Spiele in der Tonspirale	252
8.6	Die Eulersche Cent-Funktion: Töne = Winkel = Zahlen.	256
8.7	Der Tonverteilungssatz – Das Theorem von Levy-Poincaré	263
	Nachwort	273
	Literatur	275
	Stichwortverzeichnis	277