

# Inhaltsverzeichnis

<b>I. Einfache und komplexe Beweismuster</b>	<b>1</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2. Vorbereitung: Arten des Schließens</b>	<b>5</b>
2.1. Deduktives Schließen (Deduktion) . . . . .	5
2.2. Induktives Schließen (Induktion) . . . . .	6
2.3. Abduktives Schließen (Abduktion) . . . . .	8
2.4. Andere Arten des Schließens im Alltag . . . . .	9
2.5. Schließen in mathematischen Beweisen . . . . .	10
2.5.1. Vorwärtsschließen . . . . .	11
2.5.2. Rückwärtsschließen . . . . .	11
2.5.3. Bidirektionales Schließen . . . . .	11
<b>3. Vorbereitung: Schreibweisen der Logik</b>	<b>13</b>
3.1. Logische Symbole . . . . .	13
3.1.1. Junktoren . . . . .	13
3.1.2. Quantoren . . . . .	14
3.1.2.1. Kurzschreibweisen für beschränkte Quantifizierung . . . . .	15
3.2. Anwendungsspezifische Symbole . . . . .	15
3.3. Formeln und Terme . . . . .	17
3.4. Präfix, Infix, Postfix . . . . .	17
3.5. Rechenregeln . . . . .	18
<b>4. Einfache Beweismuster</b>	<b>21</b>
4.1. Deduktive Kette: Beweis durch „Ausrechnen“ . . . . .	21
4.1.1. Beweis aus Beispiel 10: Beweispräsentation vs. Beweissuche . . . . .	23
4.2. Beweis durch Fallunterscheidung . . . . .	26
4.3. Allbeweis . . . . .	26
4.4. Implikationsbeweis . . . . .	28
4.5. Existenzbeweis . . . . .	29
4.5.1. Konstruktiver Existenzbeweis . . . . .	29
4.5.2. Nicht-konstruktiver Existenzbeweis . . . . .	33
4.5.3. <b>Exkurs:</b> „Unangenehme“ Existenzbeweise . . . . .	34
4.5.4. <b>Exkurs:</b> Existenzbeweise und Programmsynthese . . . . .	38
<b>5. Komplexe Beweismuster</b>	<b>43</b>
5.1. Deduktives Netz: Beweis durch Vernetzung von deduktiven Ketten . . . . .	43
5.2. Beweis durch Kontraposition . . . . .	44
5.3. Äquivalenzbeweis . . . . .	47
5.4. Widerspruchsbeweis . . . . .	48
5.4.1. Widerspruchsbeweis durch Transformation (Reduktion) . . . . .	52
5.4.2. Widerspruchsbeweis durch Diagonalisierung . . . . .	55

5.5.	Widerlegung . . . . .	60
5.5.1.	Widerlegung durch Gegenbeispiel . . . . .	60
5.5.2.	Widerlegung durch Spezialisierung . . . . .	62
<b>6.</b>	<b>Vollständige Induktion</b>	<b>65</b>
6.1.	Beweis durch vollständige Induktion über natürliche Zahlen . . . . .	66
6.1.1.	Grundmuster . . . . .	67
6.1.1.1.	Variationen des Grundmusters . . . . .	72
6.1.2.	Starke Induktion . . . . .	74
6.1.2.1.	Variationen der starken Induktion . . . . .	74
6.1.3.	$k$ -Induktion . . . . .	81
6.2.	Allgemeinere Charakterisierung der vollständigen Induktion . . . . .	83
6.3.	Beweis durch Noethersche Induktion . . . . .	85
6.3.1.	Terminierungsbeweis durch Noethersche Induktion . . . . .	92
6.4.	Bauminduktion . . . . .	98
6.4.1.	Rekursive Definition einer Menge . . . . .	100
6.4.1.1.	Top-down-Lesart . . . . .	102
6.4.1.2.	Bottom-up-Lesart . . . . .	103
6.4.1.3.	Ableitungsbaum vs. Strukturbaum . . . . .	104
6.4.2.	Beweis durch Top-down-Bauminduktion . . . . .	105
6.4.3.	Bottom-up-Bauminduktion: Beweis durch strukturelle Induktion . . .	107
6.5.	<b>Exkurs:</b> Beweis durch transfinite Induktion . . . . .	111
<b>II.</b>	<b>Transfinite Ordinalzahlen und transfinite Induktion</b>	<b>113</b>
<b>7.</b>	<b>Einleitung zu Teil II</b>	<b>115</b>
<b>8.</b>	<b>Vollständige Induktion und Grenzwertbildung</b>	<b>117</b>
8.1.	Folgen, Reihen und Grenzwerte . . . . .	117
8.2.	Vollständige Induktion mit Limesfall . . . . .	119
8.3.	Bedeutung und Notation von „unendlich“ . . . . .	120
<b>9.</b>	<b>Transfinite Ordinalzahlen</b>	<b>121</b>
9.1.	Cantors Hotel(s) . . . . .	121
9.1.1.	Graphische Veranschaulichung zu Cantors Hotels . . . . .	128
9.1.2.	Anzahl der Zimmer in den $\omega^k$ -Hotels . . . . .	130
9.1.3.	Auf- und Absteigen in den $\omega^k$ -Hotels . . . . .	131
9.2.	Die von-Neumann-Ordinalzahlen . . . . .	131
9.3.	Transfinite Ordinalzahlen: Hydra-Bekämpfung und Terminierung . . . . .	134
9.4.	Ordinalzahlen bis einschließlich $\omega$ . . . . .	139
9.4.1.	Ordinalzahlen und Wiederholungsschleifen . . . . .	139
9.4.2.	$\omega$ -Automaten (Datenstrom-Automaten) . . . . .	142

<b>10. Transfinite Induktion</b>	<b>145</b>
10.1. Transfinite Induktion: Fixpunktsemantik . . . . .	147
10.2. Transfinite Induktion: Zimmerhöhen im $\omega^3$ -Hotel . . . . .	149
10.2.1. Höhen der Obergeschosse . . . . .	149
10.2.2. Gesamthöhen der Zimmer . . . . .	151
10.3. Transfinite Induktion bis einschließlich $\omega$ mit dem Kompaktheitssatz . . . . .	158
<b>11. Exkurs: Mathematisches Arbeiten</b>	<b>163</b>
11.1. Entwicklungsprozess zu den Ergebnissen in Abschnitt 10.2 . . . . .	163
11.2. Mathematisches Arbeiten und Pizzabacken . . . . .	165
11.2.1. Präsentationsebene . . . . .	165
11.2.2. Analyseebene . . . . .	166
11.2.3. Entwicklungsebene . . . . .	168
<b>Anhang</b>	<b>169</b>
Danksagung und Schlusswort . . . . .	171
Literaturverzeichnis . . . . .	173
Verzeichnis mathematischer Symbole und Bezeichnungen . . . . .	175
Verzeichnis der Beweisschemata und Beispiele . . . . .	177
Stichwortverzeichnis . . . . .	181