

Inhaltsverzeichnis

1. Einfache und komplexe Beweismuster	1
1. Einleitung	3
2. Vorbereitung: Arten des Schließen	5
2.1. Deduktives Schließen (Deduktion)	5
2.2. Induktives Schließen (Induktion)	6
2.3. Abduktives Schließen (Abduktion)	8
2.4. Andere Arten des Schließen im Alltag	9
2.5. Schließen in mathematischen Beweisen	10
2.5.1. Vorrwärtsschließen	11
2.5.2. Rückwärtsschließen	11
2.5.3. Bidirektionales Schließen	11
3. Vorbereitung: Schreibweisen der Logik	13
3.1. Logische Symbole	13
3.1.1. Junktoren	13
3.1.2. Quantoren	14
3.1.2.1. Kurzschreibweisen für beschränkte Quantifizierung	15
3.2. Anwendungsspezifische Symbole	15
3.3. Formeln und Terme	17
3.4. Präfix, Infix, Postfix	17
3.5. Rechenregeln	18
4. Einfache Beweismuster	21
4.1. Deduktive Kette: Beweis durch „Ausrechnen“	21
4.1.1. Beweis aus Beispiel 10: Beweispräsentation vs. Beweissuche	23
4.2. Beweis durch Fallunterscheidung	26
4.3. Allbeweis	26
4.4. Implikationsbeweis	28
4.5. Existenzbeweis	29
4.5.1. Konstruktiver Existenzbeweis	29
4.5.2. Nicht-konstruktiver Existenzbeweis	33
4.5.3. Exkurs: „Unangenehme“ Existenzbeweise	34
4.5.4. Exkurs: Existenzbeweise und Programmsynthese	38
5. Komplexe Beweismuster	43
5.1. Deduktives Netz: Beweis durch Vernetzung von deduktiven Ketten	43
5.2. Beweis durch Kontraposition	44
5.3. Äquivalenzbeweis	47
5.4. Widerspruchsbeweis	48
5.4.1. Widerspruchsbeweis durch Transformation (Reduktion)	52
5.4.2. Widerspruchsbeweis durch Diagonalisierung	55

5.5. Widerlegung	60
5.5.1. Widerlegung durch Gegenbeispiel	60
5.5.2. Widerlegung durch Spezialisierung	62
6. Vollständige Induktion	65
6.1. Beweis durch vollständige Induktion über natürliche Zahlen	66
6.1.1. Grundmuster	67
6.1.1.1. Variationen des Grundmusters	72
6.1.2. Starke Induktion	74
6.1.2.1. Variationen der starken Induktion	74
6.1.3. k -Induktion	81
6.2. Allgemeinere Charakterisierung der vollständigen Induktion	83
6.3. Beweis durch Noethersche Induktion	85
6.3.1. Terminierungsbeweis durch Noethersche Induktion	92
6.4. Bauminduktion	98
6.4.1. Rekursive Definition einer Menge	100
6.4.1.1. Top-down-Lesart	102
6.4.1.2. Bottom-up-Lesart	103
6.4.1.3. Ableitungsbaum vs. Strukturbbaum	104
6.4.2. Beweis durch Top-down-Bauminduktion	105
6.4.3. Bottom-up-Bauminduktion: Beweis durch strukturelle Induktion	107
6.5. Exkurs: Beweis durch transfinite Induktion	111
II. Transfinite Ordinalzahlen und transfinite Induktion	113
7. Einleitung zu Teil II	115
8. Vollständige Induktion und Grenzwertbildung	117
8.1. Folgen, Reihen und Grenzwerte	117
8.2. Vollständige Induktion mit Limesfall	119
8.3. Bedeutung und Notation von „unendlich“	120
9. Transfinite Ordinalzahlen	121
9.1. Cantors Hotel(s)	121
9.1.1. Graphische Veranschaulichung zu Cantors Hotels	128
9.1.2. Anzahl der Zimmer in den ω^k -Hotels	130
9.1.3. Auf- und Absteigen in den ω^k -Hotels	131
9.2. Die von-Neumann-Ordinalzahlen	131
9.3. Transfinite Ordinalzahlen: Hydra-Bekämpfung und Terminierung	134
9.4. Ordinalzahlen bis einschließlich ω	139
9.4.1. Ordinalzahlen und Wiederholungsschleifen	139
9.4.2. ω -Automaten (Datenstrom-Automaten)	142

10. Transfinite Induktion	145
10.1. Transfinite Induktion: Fixpunktsemantik	147
10.2. Transfinite Induktion: Zimmerhöhen im ω^3 -Hotel	149
10.2.1. Höhen der Obergeschosse	149
10.2.2. Gesamthöhen der Zimmer	151
10.3. Transfinite Induktion bis einschließlich ω mit dem Kompaktheitssatz	158
11. Exkurs: Mathematisches Arbeiten	163
11.1. Entwicklungsprozess zu den Ergebnissen in Abschnitt 10.2	163
11.2. Mathematisches Arbeiten und Pizzabacken	165
11.2.1. Präsentationsebene	165
11.2.2. Analyseebene	166
11.2.3. Entwicklungsebene	168
Anhang	169
Danksagung und Schlusswort	171
Literaturverzeichnis	173
Verzeichnis mathematischer Symbole und Bezeichnungen	175
Verzeichnis der Beweisschemata und Beispiele	177
Stichwortverzeichnis	181