

Inhaltsverzeichnis

I Gruppen

1	Halbgruppen	3
1.1	Definitionen	3
1.2	Unterhalbgruppen	6
1.3	Invertierbare Elemente	7
1.4	Allgemeines Assoziativ- und Kommutativgesetz	9
1.5	Potenzen und Vielfache	9
1.6	Homomorphismen, Isomorphismen	10
1.7	Direkte Produkte	13
1.8	Aufgaben	14
2	Gruppen	17
2.1	Eigenschaften und Beispiele von Gruppen	17
2.2	Untergruppen	22
2.3	Homomorphismen	26
2.4	Aufgaben	29
3	Untergruppen	33
3.1	Erzeugendensysteme, Elementordnungen	33
3.2	Nebenklassen	39
3.3	Der Satz von Lagrange	42
3.4	Aufgaben	46
4	Normalteiler und Faktorgruppen	49
4.1	Normalteiler	49
4.2	Normalisatoren	52
4.3	Faktorgruppen	53
4.4	Der Homomorphiesatz	58
4.5	Innere Automorphismen und das Zentrum einer Gruppe *	59
4.6	Isomorphiesätze	60
4.7	Aufgaben	64

5	Zyklische Gruppen	67
5.1	Der Untergruppenverband zyklischer Gruppen	67
5.2	Klassifikation der zyklischen Gruppen	69
5.3	Anwendungen in der Zahlentheorie	69
5.4	Die Automorphismengruppen zyklischer Gruppen *	76
5.5	Aufgaben	78
6	Direkte Produkte	79
6.1	Äußere direkte Produkte	79
6.2	Innere direkte Produkte	80
6.3	Anwendung in der Zahlentheorie	84
6.4	Aufgaben	91
7	Gruppenoperationen	93
7.1	Bahnen und Stabilisatoren	93
7.2	Der Fixpunktsatz	98
7.3	Die Klassengleichung	100
7.4	Aufgaben	102
8	Die Sätze von Sylow	105
8.1	Der erste Satz von Sylow	105
8.2	Der zweite Satz von Sylow	109
8.3	Gruppen kleiner Ordnung	112
8.4	Einfache Gruppen	115
8.5	Aufgaben	118
9	Symmetrische und alternierende Gruppen	121
9.1	Kanonische Zerlegung in Zyklen	121
9.2	Alternierende Gruppen	126
9.3	Zur Einfachheit der alternierenden Gruppen	128
9.4	Aufgaben	129
10	Der Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen	131
10.1	Der Hauptsatz	131
10.2	Klassifikation der endlichen abelschen Gruppen	134
10.3	Die zweite Version des Hauptsatzes *	135
10.4	Aufgaben	137
11	Auflösbare Gruppen	139
11.1	Normalreihen und Kompositionsreihen	139
11.2	Kommutatorgruppen	144
11.3	Auflösbare Gruppen	147
11.4	Untergruppen, Faktorgruppen und Produkte auflösbarer Gruppen	148

11.5	Klassen auflösbarer Gruppen	150
11.6	Aufgaben	151
12	Freie Gruppen *	153
12.1	Existenz und Eindeutigkeit freier Gruppen	154
12.2	Definierende Relationen	163
12.3	Beispiele	166
12.4	Aufgaben	167
13	Grundbegriffe der Ringtheorie	169
13.1	Definition und Beispiele	169
13.2	Teilringe	172
13.3	Die Einheitengruppe	173
13.4	Homomorphismen	174
13.5	Integritätsbereiche	176
13.6	Charakteristik eines Ringes mit 1	177
13.7	Körper und Schiefkörper	178
13.8	Quotientenkörper	180
13.9	Aufgaben	183
14	Polynomringe	187
14.1	Motivation	188
14.2	Konstruktion des Ringes $R[\mathbb{N}_0]$	188
14.3	Polynome in einer Unbestimmten	190
14.4	Prime Restklassengruppen *	200
14.5	Polynome in mehreren Unbestimmten	201
14.6	Aufgaben	204
15	Ideale	207
15.1	Definitionen und Beispiele	207
15.2	Erzeugung von Idealen	209
15.3	Einfache Ringe	211
15.4	Idealoperationen	213
15.5	Faktorringe	214
15.6	Isomorphiesätze	215
15.7	Primideale	217
15.8	Maximale Ideale	218
15.9	Aufgaben	221
16	Teilbarkeit in Integritätsbereichen	225
16.1	Teilbarkeit	225
16.2	Idealtheoretische Interpretation	230
16.3	Aufgaben	231

17	Faktorielle Ringe	233
17.1	Kennzeichnungen faktorieller Ringe	233
17.2	Der nichtfaktorielle Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ *	237
17.3	Aufgaben	238
18	Hauptidealringe. Euklidische Ringe	241
18.1	Hauptidealringe	241
18.2	Euklidische Ringe	243
18.3	Der euklidische Ring $\mathbb{Z}[i]$ *	246
18.4	Aufgaben	249
19	Zerlegbarkeit in Polynomringen und noethersche Ringe	253
19.1	Der Satz von Gauß	253
19.2	Irreduzibilität	258
19.3	Noethersche Ringe *	262
19.4	Aufgaben	265
 II Körper		
20	Grundlagen der Körpertheorie	269
20.1	Körpererweiterungen	269
20.2	Ring- und Körperadjunktion	275
20.3	Algebraische Elemente. Minimalpolynome	276
20.4	Aufgaben	279
21	Einfache und algebraische Körpererweiterungen	281
21.1	Einfache Körpererweiterungen	282
21.2	Fortsetzung von Isomorphismen auf einfache Erweiterungen	284
21.3	Algebraische Körpererweiterungen	286
21.4	Aufgaben	290
22	Konstruktionen mit Zirkel und Lineal *	293
22.1	Konstruierbarkeit	293
22.2	Die drei klassischen Probleme	300
22.3	Aufgaben	301
23	Transzendente Körpererweiterungen *	303
23.1	Transzendenzbasen	303
23.2	Der Transzendenzgrad	307
23.3	Aufgaben	308
24	Algebraischer Abschluss. Zerfällungskörper	309
24.1	Der algebraische Abschluss eines Körpers	310

24.2	Zerfällungskörper	315
24.3	Normale Körpererweiterungen	321
24.4	Aufgaben	323
25	Separable Körpererweiterungen	327
25.1	Ableitung. Mehrfache Wurzeln	327
25.2	Separabilität	329
25.3	Vollkommene Körper	332
25.4	Der Satz vom primitiven Element	333
25.5	Der separable Abschluss	335
25.6	Aufgaben	339
26	Endliche Körper	343
26.1	Existenz und Eindeutigkeit	343
26.2	Der Verband der Teilkörper	346
26.3	Automorphismen	348
26.4	Aufgaben	348
27	Die Galois Korrespondenz	351
27.1	K -Automorphismen	352
27.2	Die allgemeine Galois Korrespondenz	355
27.3	Algebraische Galois erweiterungen	360
27.4	Hauptsatz der endlichen Galois theorie	362
27.5	Ergänzungen	365
27.6	Aufgaben	368
28	Der Zwischenkörperverband einer Galois erweiterung *	371
28.1	Norm und Spur	371
28.2	Hinweise zur Ermittlung des Fixkörpers $\mathcal{F}(\Delta)$	372
28.3	Hinweise zur Ermittlung von $\Gamma = \Gamma(L/K)$	374
28.4	Beispiele	375
28.5	Die Galois gruppe eines Polynoms	377
28.6	Aufgaben	381
29	Kreisteilungskörper	383
29.1	Einheitswurzeln. Kreisteilungskörper	384
29.2	Kreisteilungspolynome	386
29.3	Die Galois gruppe von K_n/K	391
29.4	Konstruktion regulärer Vielecke *	393
29.5	Aufgaben	396
30	Auflösung algebraischer Gleichungen durch Radikale	399
30.1	Zyklische Körpererweiterungen	400

30.2	Auflösbarkeit	404
30.3	Das Auflösbarkeitskriterium	405
30.4	Aufgaben	409
31	Die allgemeine Gleichung	411
31.1	Symmetrische Funktionen	411
31.2	Das allgemeine Polynom	414
31.3	Die Diskriminante eines Polynoms *	417
31.4	Die allgemeine Gleichung vom Grad 3 *	419
31.5	Die allgemeine Gleichung vom Grad 4 *	422
31.6	Aufgaben	423
III	Moduln	
32	Moduln *	427
32.1	Links- und Rechtsmoduln	427
32.2	Untermoduln	430
32.3	Direkte Produkte und direkte Summen von Moduln	431
32.4	Faktormoduln	432
32.5	Freie Moduln	436
32.6	Moduln über Hauptidealringen	440
32.7	Aufgaben	448
Anhang A	Hilfsmittel	449
A.1	Äquivalenzrelationen	449
A.2	Transfinite Beweismethoden	450
A.3	Kardinalzahlen	453
A.4	Zusammenfassung der Axiome	455
Literatur		457
Sachverzeichnis		459