

Inhaltsverzeichnis

I Analysis in mehreren Variablen

1 Funktionen von mehreren Variablen – wenn verschiedene Größen zusammenwirken	3
1.1 Skalarwertige Funktionen	4
1.2 Vektorwertige Funktionen	8
1.3 Maximaler Definitionsbereich	9
1.4 Grenzwerte und Stetigkeit	10
Aufgaben	15
2 Von Gipfeln und Tälern – Differenzialrechnung für Funktionen von mehreren Variablen	17
2.1 Partielle Ableitungen	18
2.2 Differenzierbarkeit	21
2.3 Die Taylor-Entwicklung im \mathbb{R}^n	28
2.4 Gradient und Richtungsableitung	30
2.5 Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingung	34
2.6 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingung	45
2.7 Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate – eine Minimierungsaufgabe im \mathbb{R}^n	48
2.8 Implizit definierte Funktionen	53
2.9 Die Ableitung für Funktionen von $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	58
Aufgaben	62
3 Bilanzieren in der Ebene und im Raum – Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen	65
3.1 Ebene Bereichsintegrale	66
3.2 Bereichsintegrale im \mathbb{R}^n	79
3.3 Die Transformationsformel	86
3.4 Numerische Integration	98
3.5 Numerische Berechnung mehrdimensionaler Integrale	105
Aufgaben	108

XI

4	Kurven – kreuz und quer durch den Raum	111
4.1	Vom Funktionsgraphen zur Kurve	112
4.2	Tangentenvektoren und Glattheit	118
4.3	Die Bogenlänge	122
4.4	Etwas Differenzialgeometrie	126
4.5	Spezielle Kurven	136
4.6	Kubische Splines	138
	Aufgaben	141
5	Integrale über Kurven – das Kurvenintegral im \mathbb{R}^n	143
5.1	Kurvenintegral für eine skalare Funktion, Kurvenintegral erster Art	144
5.2	Kurvenintegral für ein Vektorfeld, Kurvenintegral zweiter Art	147
5.3	Gradientenfelder	151
	Aufgaben	157
6	Flächen und Integrale über Flächen im \mathbb{R}^3	159
6.1	Flächen im \mathbb{R}^3	160
6.2	Flächeninhalt	165
6.3	Flächenintegral für eine skalare Funktion und Flächenintegral erster Art	168
6.4	Flächenintegral für ein Vektorfeld, Flussintegral und Flächenintegral zweiter Art	171
	Aufgaben	173
7	Vom Ableiten und Integrieren von Feldern – Vektoranalysis und Integralsätze	177
7.1	Divergenz und Integralsatz von Gauß	178
7.2	Rotation und Integralsatz von Stokes	185
7.3	Rechnen mit ∇ , div , rot und die Integralsätze von Green	191
7.4	Aufbau eines Vektorfeldes aus Quellen und Wirbeln	193
7.5	Maxwell-Gleichungen	195
	Aufgaben	197
II Differenzialgleichungen		
8	Differenzialgleichungen – Grundbegriffe und erste Beispiele	203
8.1	Was ist eine Differenzialgleichung?	204
8.2	Erste Lösungsversuche	205
8.3	Rand- und Anfangsbedingungen	208
	Aufgaben	211
9	Differenzialgleichungen erster Ordnung	213
9.1	Grundbegriffe	214
9.2	Trennung der Variablen	215
9.3	Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung	218
9.4	Substitution	225
9.5	Numerische Verfahren	229
	Aufgaben	234

10	Lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	237
10.1	Grundbegriffe und Lösungs idee	238
10.2	Homogene Gleichung: Exponentialansatz	240
10.3	Inhomogene Gleichung: Ansatz vom Typ der rechten Seite	243
10.4	Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten höherer Ordnung	252
10.5	Differenzialgleichungssysteme	255
	Aufgaben	266
11	Laplace-Transformation und ihre Anwendung auf Differenzialgleichungen	269
11.1	Laplace-Transformation	270
11.2	Anwendung auf Differenzialgleichungen	276
	Aufgaben	280
12	Partielle Differenzialgleichungen – Grundbegriffe und erste Beispiele	281
12.1	Was sind partielle Differenzialgleichungen?	282
12.2	Erste Lösungsversuche	283
12.3	Lineare Gleichungen erster Ordnung: Geometrische Lösung von Transportgleichungen	286
12.4	Die Herleitung von partiellen Differenzialgleichungen	287
12.5	Anfangs- und Randbedingungen	291
	Aufgaben	292
13	Partielle Differenzialgleichungen zweiter Ordnung	293
13.1	Typeinteilung von linearen Gleichungen zweiter Ordnung	294
13.2	Anfangswertprobleme – typische Eigenschaften von Wellen und Diffusion	296
13.3	Anfangsrandwertprobleme	299
13.4	Randwertprobleme	307
13.5	Numerisches Lösen mit Finite-Differenzen-Verfahren	309
	Aufgaben	318
III Optimierung		
14	Einführung in die Optimierung	323
14.1	Was ist Optimierung?	324
14.2	Beispiele für Optimierungsaufgaben	324
14.3	Das Standardproblem und Grundkonzepte der Optimierung	328
	Aufgaben	331
15	(Reelle) lineare Optimierung	333
15.1	Formulierung	334
15.2	Grafisches Lösungsverfahren	339
15.3	Das Simplexverfahren	341
15.4	Dualität	355
	Aufgaben	363

16	Grundkonzepte der ganzzahligen linearen Optimierung	365
16.1	Einführung in die ganzzahlige Optimierung	366
16.2	Probleme mit total unimodularen Matrizen	367
16.3	Branch-and-Bound-Methoden	371
	Aufgaben	375
17	Nichtlineare Optimierung	377
17.1	Unrestringierte nichtlineare Optimierung	378
17.2	Optimierungsaufgaben mit Gleichungsrestriktionen	382
17.3	Optimierungsaufgaben mit Gleichungs- und Ungleichungsrestriktionen	396
17.4	Sensitivitätsanalyse	402
	Aufgaben	408
18	Iterative numerische Verfahren für Optimierungsprobleme	411
18.1	Abstiegsverfahren	412
18.2	Lagrange-Newton- und SQP-Verfahren	418
18.3	Innere-Punkte-Verfahren	424
	Aufgaben	426
	Anhang A: Lösungen	427
	Abbildungsnachweis	475
	Sachverzeichnis	477