

Inhaltsverzeichnis

Teil I Aufgaben

1	Der Zahlenraum $\mathbb{R}^n$ und der Begriff des reellen Vektorraums	3
1.1	Lineare Gleichungssysteme	3
1.2	Vektorrechnung im $\mathbb{R}^n$ und der Begriff des $\mathbb{R}$ -Vektorraums	5
1.3	Lineare Unterräume und das Matrix-Vektor-Produkt	6
1.4	Lineare (Un-)Abhängigkeit und Dimension	7
1.5	Das euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ und Vektorräume mit Skalarprodukt	8
1.6	Mathematische Modellierung: Diskrete lineare Probleme und ihre Herkunft	9
1.7	Affine Räume I	11
2	Matrizen und lineare Abbildungen	13
2.1	Lineare Abbildungen	13
2.2	Lineare Abbildungen und ihre Matrizendarstellung	14
2.3	Matrizenrechnung	15
2.4	Lösbare und nichtlösbare lineare Gleichungssysteme	17
2.5	Permutationsmatrizen und die LR-Zerlegung einer Matrix	18
2.6	Die Determinante	19
2.7	Das Vektorprodukt	20
2.8	Affine Räume II	21
3	Vom $\mathbb{R}$-Vektorraum zum K-Vektorraum: Algebraische Strukturen	23
3.1	Gruppen und Körper	23
3.2	Vektorräume über allgemeinen Körpern	24
3.3	Euklidische und unitäre Vektorräume	25
3.4	Der Quotientenvektorraum	26
3.5	Der Dualraum	26

4	Koordinatentransformationen und Normalformen von Matrizen	29
4.1	Basiswechsel und Koordinatentransformationen	29
4.2	Eigenwerttheorie	30
4.3	Unitäre Diagonalisierbarkeit: Die Hauptachsentransformation	34
4.4	Blockdiagonalisierung aus der SCHUR-Normalform	34
4.5	Die JORDANSche Normalform	35
4.6	Die Singulärwertzerlegung	37
4.7	Positiv definite Matrizen und quadratische Optimierung	38
5	Bilinearformen und Quadriken	41
5.1	α -Bilinearformen	41
5.2	Symmetrische Bilinearformen und hermitesche Formen	42
5.3	Quadriken	43
5.4	Alternierende Bilinearformen	45
6	Polyeder und lineare Optimierung	47
6.1	Elementare konvexe Geometrie	47
6.2	Polyeder	47
6.3	Beschränkte Polyeder	48
6.4	Das Optimierungsproblem	49
6.5	Ecken und Basislösungen	50
6.6	Das Simplex-Verfahren	50
6.7	Optimalitätsbedingungen und Dualität	51
7	Lineare Algebra und Analysis	53
7.1	Normierte Vektorräume	53
7.2	Normierte Algebren	54
7.3	HILBERT-Räume	56
7.4	Ausblick: Lineare Modelle, nichtlineare Modelle, Linearisierung . . .	57
8	Einige Anwendungen der Linearen Algebra	59
8.1	Lineare Gleichungssysteme, Ausgleichsprobleme und Eigenwerte unter Datenstörungen	59
8.2	Klassische Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme und Eigenwerte	60
8.3	Datenanalyse, -synthese und -kompression	62
8.4	Lineare Algebra und Graphentheorie	63
8.5	(Invers-)Monotone Matrizen und Input-Output-Analyse	64
8.6	Kontinuierliche und diskrete dynamische Systeme	64

Teil II Lösungen

1	Der Zahlenraum $\mathbb{R}^n$ und der Begriff des reellen Vektorraums	69
1.1	Lineare Gleichungssysteme	69
1.2	Vektorrechnung im $\mathbb{R}^n$ und der Begriff des $\mathbb{R}$ -Vektorraums	78
1.3	Lineare Unterräume und das Matrix-Vektor-Produkt	80
1.4	Lineare (Un-)Abhängigkeit und Dimension	83
1.5	Das euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ und Vektorräume mit Skalarprodukt	89
1.6	Mathematische Modellierung: Diskrete lineare Probleme und ihre Herkunft	95
1.7	Affine Räume I	99
2	Matrizen und lineare Abbildungen	105
2.1	Lineare Abbildungen	105
2.2	Lineare Abbildungen und ihre Matrizendarstellung	109
2.3	Matrizenrechnung	115
2.4	Lösbare und nichtlösbare lineare Gleichungssysteme	123
2.5	Permutationsmatrizen und die LR-Zerlegung einer Matrix	129
2.6	Die Determinante	133
2.7	Das Vektorprodukt	137
2.8	Affine Räume II	138
3	Vom $\mathbb{R}$-Vektorraum zum K-Vektorraum: Algebraische Strukturen	141
3.1	Gruppen und Körper	141
3.2	Vektorräume über allgemeinen Körpern	144
3.3	Euklidische und unitäre Vektorräume	147
3.4	Der Quotientenvektorraum	149
3.5	Der Dualraum	150
4	Koordinatentransformationen und Normalformen von Matrizen	153
4.1	Basiswechsel und Koordinatentransformationen	153
4.2	Eigenwerttheorie	156
4.3	Unitäre Diagonalisierbarkeit: Die Hauptachsentransformation	164
4.4	Blockdiagonalisierung aus der SCHUR-Normalform	166
4.5	Die JORDANSche Normalform	174
4.6	Die Singulärwertzerlegung	178
4.7	Positiv definite Matrizen und quadratische Optimierung	181
5	Bilinearformen und Quadriken	187
5.1	α -Bilinearformen	187
5.2	Symmetrische Bilinearformen und hermitesche Formen	192
5.3	Quadriken	197
5.4	Alternierende Bilinearformen	204

6	Polyeder und lineare Optimierung	209
6.1	Elementare konvexe Geometrie	209
6.2	Polyeder	210
6.3	Beschränkte Polyeder	214
6.4	Das Optimierungsproblem	215
6.5	Ecken und Basislösungen	218
6.6	Das Simplex-Verfahren	221
6.7	Optimalitätsbedingungen und Dualität	224
7	Lineare Algebra und Analysis	229
7.1	Normierte Vektorräume	229
7.2	Normierte Algebren	232
7.3	HILBERT-Räume	238
7.4	Ausblick: Lineare Modelle, nichtlineare Modelle, Linearisierung	241
8	Einige Anwendungen der Linearen Algebra	243
8.1	Lineare Gleichungssysteme, Ausgleichsprobleme und Eigenwerte unter Datenstörungen	243
8.2	Klassische Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme und Eigenwerte	245
8.3	Datenanalyse, -synthese und -kompression	252
8.4	Lineare Algebra und Graphentheorie	255
8.5	(Invers-)Monotone Matrizen und Input-Output-Analyse	256
8.6	Kontinuierliche und diskrete dynamische Systeme	258
	Literaturverzeichnis	263