

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematische Grundbegriffe	1
1.1	Einführung	1
1.2	Mengen	3
1.2.1	Grundlegende Mengendefinitionen	3
1.2.2	Grundlegende Mengenoperationen	5
1.3	Zahlen	8
1.3.1	Zahlensysteme	8
1.3.2	Intervalle	10
1.4	Kombinatorik	12
1.4.1	Permutationen, Binomialkoeffizienten	13
1.4.2	Das Pascal'sche Dreieck	14
1.4.3	Urnenmodell in der Kombinatorik	17
1.5	Kurzer Verständnistest	19
1.6	Anwendungen	20
1.6.1	Zahlen im Rechner: Stellenwertsysteme	20
1.6.2	Zahlen im Rechner: Schaltalgebra, Aussagenlogik und Boole'sche Verbände	22
1.7	Zusammenfassung	24
1.8	Übungsaufgaben	26
1.9	Lösungen	27
2	Folgen und endliche Summen	29
2.1	Einführung	29
2.2	Folgen und ihre Eigenschaften	31
2.3	Endliche arithmetische und geometrische Folgen und Reihen	38
2.4	Vollständige Induktion	41
2.5	Kurzer Verständnistest	46
2.6	Anwendungen	47
2.6.1	Beweise in der Mathematik	47
2.6.2	Börsenkurs und Rendite einer Anleihe	49
2.7	Zusammenfassung	51

2.8	Übungsaufgaben	54
2.9	Lösungen	55
3	Funktionen	58
3.1	Einführung	58
3.2	Grundbegriffe	60
3.2.1	Funktionen und ihre Darstellung	61
3.2.2	Die Umkehrfunktion	64
3.2.3	Wichtige Eigenschaften von Funktionen	66
3.3	Grenzwerte bei Funktionen	70
3.3.1	Begriffsdefinition	70
3.3.2	Linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert	72
3.3.3	Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte	74
3.4	Stetigkeit	75
3.5	Die elementaren Funktionen	78
3.5.1	Polynome	78
3.5.2	Die trigonometrischen Funktionen und die Arcusfunktionen	83
3.5.3	Die Exponentialfunktionen und die Logarithmen	89
3.5.4	Die Hyperbel- und die Areafunktionen	94
3.6	Kurzer Verständnistest	98
3.7	Anwendungen	99
3.7.1	Datenallokation in verteilten Datenbanksystemen	99
3.7.2	Mathematische Funktionsauswertungen mittels Taschenrechner	102
3.8	Zusammenfassung	105
3.9	Übungsaufgaben	112
3.10	Lösungen	113
4	Algebra	117
4.1	Einführung	117
4.2	Relationen	118
4.3	Gruppen	124
4.4	Ringe und Körper	130
4.5	Kurzer Verständnistest	132
4.6	Anwendungen	133
4.6.1	Küchenkräuter in Männermagazinen	133
4.6.2	Warum gilt „Minus mal Minus ergibt Plus“?	134
4.6.3	Modulo-Rechnung	135
4.7	Zusammenfassung	139
4.8	Übungsaufgaben	140
4.9	Lösungen	141

5	Lineare Algebra	143
5.1	Einführung	143
5.2	Grundbegriffe	144
5.3	Das Skalarprodukt	150
5.4	Matrizen	153
5.4.1	Grundlegende Definitionen	154
5.4.2	Operationen und Rechenregeln für Matrizen	157
5.4.3	Die Matrizenmultiplikation	158
5.4.4	Rang einer Matrix	162
5.5	Die Determinante	163
5.6	Lineare Gleichungssysteme	165
5.6.1	Das Gauß'sche Eliminationsverfahren	165
5.6.2	Lösungstheorie mittels Rangbegriff	169
5.7	Die Inverse einer Matrix	171
5.7.1	Definition und Rechenregeln	172
5.7.2	Das Gauß-Jordan-Verfahren	173
5.8	Kurzer Verständnistest	176
5.9	Anwendungen	177
5.9.1	Der Hamming-Abstand	177
5.9.2	Computer-Tomographie und lineare Gleichungssysteme	179
5.10	Zusammenfassung	182
5.11	Übungsaufgaben	189
5.12	Lösungen	190
6	Differentialrechnung	194
6.1	Einführung	194
6.2	Der Ableitungsbegriff	195
6.2.1	Geometrische Bedeutung und Definition der Ableitung	196
6.2.2	Tangente und Differential	200
6.2.3	Differentielle Fehleranalyse	204
6.2.4	Stetigkeit und Differenzierbarkeit	205
6.3	Ableitung elementarer Funktionen und höhere Ableitungen	207
6.3.1	Ableitung der elementaren Funktionen	207
6.3.2	Höhere Ableitungen	208
6.4	Ableitungstechniken	209
6.4.1	Ableitungsregeln	209
6.4.2	Grenzwertregeln von Bernoulli-L'Hospital	214
6.5	Extrema und Kurvendiskussion	215
6.5.1	Extremwerte	216
6.5.2	Wendepunkte und Krümmungsverhalten	219
6.5.3	Elementare Kurvendiskussion	221
6.6	Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen	222
6.6.1	Bisektions- und Sekantenverfahren, Regula falsi	223
6.6.2	Newton'sches Iterationsverfahren	226
6.7	Taylorpolynome	228

6.8	Funktionen in mehreren Veränderlichen	233
6.8.1	Definitionen und Beispiele	233
6.8.2	Partielle Ableitungen 1. Ordnung	239
6.8.3	Tangentialebene, totale Differenzierbarkeit	241
6.8.4	Das totale Differential	243
6.8.5	Gradient und Richtungsableitung	245
6.8.6	Bestimmung von Extremwerten, höhere Ableitungen	248
6.8.7	Verallgemeinerung auf den \mathbb{R}^n	253
6.9	Kurzer Verständnistest	254
6.10	Anwendungen	255
6.10.1	Ökonomie: Preiselastizität der Nachfrage	255
6.10.2	Optimierung von Aktienportfolios	256
6.11	Zusammenfassung	260
6.12	Übungsaufgaben	266
6.13	Lösungen	267
7	Reihen	271
7.1	Einführung	271
7.2	Konvergenz unendlicher Reihen	272
7.3	Konvergenzkriterien	277
7.4	Potenzreihen und Taylorreihen	282
7.4.1	Potenzreihen	282
7.4.2	Taylorreihen	285
7.5	Kurzer Verständnistest	288
7.6	Anwendungen	289
7.6.1	Achilles und die Schildkröte	289
7.6.2	Wie wertet der Taschenrechner z.B. die e-Funktion aus?	290
7.7	Zusammenfassung	293
7.8	Übungsaufgaben	298
7.9	Lösungen	299
8	Integration	303
8.1	Einführung	303
8.2	Grundbegriffe	304
8.3	Integrationstechniken	314
8.4	Uneigentliche Integrale	319
8.5	Mehrfachintegrale	321
8.6	Kurzer Verständnistest	329
8.7	Anwendungen	330
8.7.1	Das Volumen eines Kühlturms	330
8.7.2	Integrale im Straßenbau	331
8.8	Zusammenfassung	333
8.9	Übungsaufgaben	337
8.10	Lösungen	338

9	Die komplexen Zahlen	341
9.1	Einführung	341
9.2	Der Körper der komplexen Zahlen	342
9.2.1	Die Definition der komplexen Zahlen	343
9.2.2	Reelle und komplexe Zahlen	343
9.2.3	Die Grundrechenarten	344
9.2.4	Der Körper der komplexen Zahlen	346
9.2.5	Die konjugiert-komplexe Zahl	346
9.3	Die Gauß'sche Zahlenebene	348
9.3.1	Veranschaulichung durch die Gauß'sche Zahlenebene	349
9.3.2	Polarkoordinaten in der Ebene	351
9.3.3	Betrag und Argument von komplexen Zahlen	353
9.3.4	Die Polarform komplexer Zahlen	354
9.3.5	Multiplikation und Division komplexer Zahlen	355
9.3.6	Die Exponentialform komplexer Zahlen	357
9.4	Algebraische Gleichungen	359
9.4.1	Quadratische Gleichungen	359
9.4.2	Komplexe Polynome	361
9.4.3	Fundamentalsatz der Algebra	364
9.4.4	Komplexe Wurzeln	365
9.5	Kurzer Verständnistest	369
9.6	Anwendungen	370
9.6.1	Fraktale	370
9.6.2	Wechselspannungen in der Elektrotechnik	371
9.7	Zusammenfassung	373
9.8	Übungsaufgaben	375
9.9	Lösungen	376
10	Differentialgleichungen	378
10.1	Einführung	378
10.2	Grundbegriffe	380
10.3	Lösungstechniken	391
10.4	Lineare Differentialgleichungen	394
10.5	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	399
10.6	Kurzer Verständnistest	407
10.7	Anwendungen	408
10.7.1	Wachstumsprozesse	408
10.7.2	Der harmonische Oszillator und elektrische Schwingkreise	411
10.8	Zusammenfassung	415
10.9	Übungsaufgaben	419
10.10	Lösungen	420

11	Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik	423
11.1	Einführung	423
11.2	Deskriptive Statistik	425
11.2.1	Mittelwert und Varianz	425
11.2.2	Klasseneinteilung und Histogramme	428
11.2.3	Regression und Korrelation	432
11.3	Wahrscheinlichkeitsrechnung	436
11.3.1	Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten	436
11.3.2	Das Axiomensystem von Kolmogoroff	439
11.3.3	Bedingte Wahrscheinlichkeiten	441
11.4	Zufallsvariable und Verteilungsfunktion	444
11.4.1	Grundbegriffe	444
11.4.2	Erwartungswert und Varianz	447
11.4.3	Spezielle Verteilungen	450
11.5	Kurzer Verständnistest	455
11.6	Anwendungen	456
11.6.1	Eine sonderbare Ziffern-Verteilung und die Steuerrevision	456
11.6.2	HIV-Tests	458
11.7	Zusammenfassung	461
11.8	Übungsaufgaben	469
11.9	Lösungen	470
	Tipps zum Studium	475
	Literaturverzeichnis	480
	Index	481