Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur vierten Ausgabe VII

Vorwort zur Deutschen Ausgabe IX

Ratschläge für die Leser XI

Was ist Mathematik? XIX

Erstes Kapitel

Die natürlichen Zahlen

Einleitung 1

§ 1. Das Rechnen mit ganzen Zahlen 1
1. Gesetze der Arithmetik S. 1 – 2. Darstellung der positiven ganzen Zahlen S. 4
3. Das Rechnen in nichtdezimalen Systemen S. 6

§ 2. Die Unendlichkeit des Zahlensystems. Mathematische Induktion 8
1. Das Prinzip der mathematischen Induktion S. 8 – 2. Die arithmetische Reihe S. 10 – 3. Die geometrische Reihe S. 11 – 4. Die Summe der ersten n Quadrate S. 12 – 5. Eine wichtige Ungleichung S. 13 – 6. Der binomische Satz S. 13 – 7. Weitere Bemerkungen zur mathematischen Induktion S. 15

Ergänzung zu Kapitel I. Zahlentheorie 17

Einleitung 17

§ 1. Die Primzahlen 17
1. Grundtatsachen S. 17 – 2. Die Verteilung der Primzahlen S. 20 – a) Formeln zur Konstruktion von Primzahlen S. 21 – b) Primzahlen in arithmetischen Folgen S. 21 – c) Der Primzahlsatz S. 22 – d) Zwei ungelöste Probleme, die Primzahlen betreffen S. 24

§ 2. Kongruenzen 26
1. Grundbegriffe S. 26 – 2. Der kleine Fermatsche Satz S. 30 – 3. Quadratische Reste S. 31

§ 3. Pythagoreische Zahlen und großer Fermatscher Satz 32

§ 4. Der euklidische Algorithmus 34
1. Die allgemeine Theorie S. 34 – 2. Anwendung auf den Fundamentalsatz der Arithmetik S. 38 – 3. Eulers φ-Funktion. Nochmals kleiner Fermatscher Satz S. 39 – 4. Kettenbrüche. Diophantische Gleichungen S. 40

Zweites Kapitel

Das Zahlensystem der Mathematik

Einleitung 42

§ 1. Die rationalen Zahlen 42
1. Messen und Zählen S. 42 – 2. Die innere Notwendigkeit der rationalen Zahlen. Prinzip der Verallgemeinerung S. 44 – 3. Geometrische Deutung der rationalen Zahlen S. 46

§ 2. Inkommensurable Strecken, irrationale Zahlen und der Grenzwertbegriff . . . 47
1. Einleitung S. 47 – 2. Unendliche Dezimalbrüche S. 49 – 3. Grenzwerte. Unendliche geometrische Reihen S. 51 – 4. Rationale Zahlen und periodische Dezimalbrüche S. 54 – 5. Allgemeine Definition der Irrationalzahlen durch Intervallschachtelungen S. 55 – 6. Andere Methoden zur Definition der irrationalen Zahlen. Dedekindsche Schnitte S. 57

§ 3. Bemerkungen über analytische Geometrie 58
1. Das Grundprinzip S. 58 – 2. Gleichungen von Geraden und Kurven S. 59

§ 4. Die mathematische Analyse des Unendlichen 62
1. Grundbegriffe S. 62 – 2. Die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen und die Nichtabzählbarkeit des Kontinuums S. 63 – 3. CANTORS „Kardinalzahlen" S. 67
4. Die indirekte Beweismethode S. 68 – 5. Die Paradoxien des Unendlichen S. 69
6. Die Grundlagen der Mathematik S. 70

§ 5. Komplexe Zahlen 71
1. Der Ursprung der komplexen Zahlen S. 71 – 2. Die geometrische Deutung der komplexen Zahlen S. 74 – 3. Die Moivresche Formel und die Einheitswurzeln S. 78
4. Der Fundamentalsatz der Algebra S. 80

§ 6. Algebraische und transzendente Zahlen 82
1. Definition und Existenz S. 82 – Der Liouvillesche Satz und die Konstruktion transzendenter Zahlen S. 83

Ergänzung zu Kapitel II. Mengenalgebra (Boolesche Algebra) 86
1. Allgemeine Theorie S. 86 – 2. Anwendung auf die mathematische Logik S. 89
3. Eine Anwendung auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung S. 91

Drittes Kapitel

Geometrische Konstruktionen. Die Algebra der Zahlkörper

Zahlkörper 93

Einleitung 93

I. Teil. Unmöglichkeitsbeweise und Algebra 95

§ 1. Grundlegende geometrische Konstruktionen 95
1. Rationale Operationen und Quadratwurzeln S. 95 – 2. Regelmäßige Vielecke S. 97 – 3. Das Problem des Apollonius S. 99

§ 2. Konstruierbare Zahlen und Zahlkörper 101
1. Allgemeine Theorie S. 101 – 2. Alle konstruierbaren Zahlen sind algebraisch S. 106

§ 3. Die Unlösbarkeit der drei griechischen Probleme 107
1. Verdoppelung des Würfels S. 107 – 2. Ein Satz über kubische Gleichungen S. 108 – 3. Winkeldreiteilung S. 109 – 4. Das regelmäßige Siebeneck S. 111
5. Bemerkungen zum Problem der Quadratur des Kreises S. 112

II. Teil. Verschiedene Konstruktionsmethoden 112

§ 4. Geometrische Abbildungen. Die Inversion 112
1. Allgemeine Bemerkungen S. 112 – 2. Eigenschaften der Inversion S. 113
3. Geometrische Konstruktion inverser Punkte S. 115 – 4. Halbierung einer Strecke und Bestimmung des Kreismittelpunktes mit dem Zirkel allein S. 116

§ 5. Konstruktionen mit anderen Hilfsmitteln. Mascheroni-Konstruktionen mit dem Zirkel allein 117
1. Eine klassische Konstruktion zur Verdoppelung des Würfels S. 117 – Beschränkung auf die Benutzung des Zirkels allein S. 117 – 3. Das Zeichnen mit mechanischen Geräten. Mechanische Kurven. Zykloiden. S. 121 – 4. Gelenkmechanismen. PEAUCELLIERS und HARTS Inversoren. S. 123

§ 6. Weiteres über die Inversion und ihre Anwendungen 125
1. Invarianz der Winkel. Kreisscharen S. 125 – 2. Anwendung auf das Problem des APOLLONIUS S. 127 – 3. Mehrfache Reflexionen S. 128

Viertes Kapitel

Projektive Geometrie. Axiomatik. Nichteuklidische Geometrien

§ 1. Einleitung 130
1. Klassifizierung geometrischer Eigenschaften. Invarianz bei Transformationen S. 130 – 2. Projektive Transformationen S. 131

§ 2. Grundlegende Begriffe 132
1. Die Gruppe der projektiven Transformationen S. 132 – 2. Der Satz von DESARGUES S. 134

§ 3. Das Doppelverhältnis 135
1. Definition und Beweis der Invarianz S. 135 – 2. Anwendung auf das vollständige Vierseit S. 139

§ 4. Parallelität und Unendlichkeit 140
1. Unendlich ferne Punkte als „uneigentliche Punkte" S. 140 – 2. Uneigentliche Elemente und Projektion S. 143 – 3. Doppelverhältnisse mit unendlich fernen Elementen S. 144

§ 5. Anwendungen 144
1. Vorbereitende Bemerkungen S. 144 – 2. Beweis des Desarguesschen Satzes in der Ebene S. 145 – 3. Der Pascalsche Satz S. 146 – 4. Der Satz von BRIANCHON S. 147
5. Das Dualitätsprinzip S. 147

§ 6. Analytische Darstellung 148
1. Einleitende Bemerkungen S. 148 – 2. Homogene Koordinaten. Die algebraische Grundlage der Dualität S. 149

§ 7. Aufgaben über Konstruktionen mit dem Lineal allein 152

§ 8. Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung 153
1. Elementare metrische Geometrie der Kegelschnitte S. 153 – 2. Projektive Eigenschaften der Kegelschnitte S. 156 – 3. Kegelschnitte als Hüllkurven S. 158
4. Pascals und Brianchons allgemeine Sätze für Kegelschnitte S. 161 – 5. Das Hyperboloid S. 162

§ 9. Axiomatik und nichteuklidische Geometrie 163
1. Die axiomatische Methode S. 163 – 2. Hyperbolische nichteuklidische Geometrie S. 166 – 3. Geometrie und Wirklichkeit S. 170 – 4. Poincarés Modell S. 171
5. Elliptische oder Riemannsche Geometrie S. 172

Anhang. Geometrie in mehr als drei Dimensionen 174
1. Einleitung S. 174 – 2. Die analytische Definition S. 174 – 3. Die geometrische oder kombinatorische Definition S. 176

Fünftes Kapitel

Topologie

Einleitung 180

§ 1. Die Eulersche Polyederformel 181

§ 2. Topologische Eigenschaften von Figuren 184
1. Topologische Eigenschaften S. 184 – 2. Zusammenhang S. 185

§ 3. Andere Beispiele topologischer Sätze 186
1. Der Jordansche Kurvensatz S. 186 – 2. Das Vierfarbenproblem S. 188 – 3. Der Begriff der Dimension S. 189 – 4. Ein Fixpunktsatz S. 192 – 5. Knoten S. 195

§ 4. Topologische Klassifikation der Flächen 195
1. Das Geschlecht einer Fläche S. 195 – 2. Die Eulersche Charakteristik einer Fläche S. 197 – 3. Einseitige Flächen S. 198

Anhang 200
1. Der Fünffarbensatz S. 200 – 2. Der Jordansche Kurvensatz für Polygone S. 202
3. Der Fundamentalsatz der Algebra S. 204

Sechstes Kapitel

Funktionen und Grenzwerte

Einleitung 207

§ 1. Variable und Funktion 208
1. Definitionen und Beispiele S. 208 – 2. Das Bogenmaß eines Winkels S. 211
3. Graphische Darstellung einer Funktion. Inverse Funktionen S. 212 – 4. Zusammengesetzte Funktionen S. 214 – 5. Stetigkeit S. 215 – 6. Funktionen von mehreren Veränderlichen S. 217 – 7. Funktionen und Transformationen S. 219

§ 2. Grenzwerte 220
1. Der Grenzwert einer Folge a_n S. 220 – 2. Monotone Folgen S. 224 – 3. Die Eulersche Zahl e S. 226 – 4. Die Zahl π S. 227 – 5. Kettenbrüche S. 229

§ 3. Grenzwerte bei stetiger Annäherung 231
1. Einleitung. Allgemeine Definition S. 231 – 2. Bemerkungen zum Begriff des Grenzwertes S. 232 – 3. Der Grenzwert von $\frac{\sin x}{x}$ S. 234 – 4. Grenzwerte für $x \to \infty$ S. 235

§ 4. Genaue Definition der Stetigkeit 236

§ 5. *Zwei grundlegende Sätze über stetige Funktionen* 237
1. Der Satz von BOLZANO S. 237 – 2. Beweis des Bolzanoschen Satzes S. 238 – 3. Der Satz von WEIERSTRASS über Extremwerte S. 239 – 4. Ein Satz über Zahlenfolgen. Kompakte Mengen S. 240

§ 6. Einige Anwendungen des Satzes von BOLZANO 241
1. Geometrische Anwendungen S. 241 – 2. Anwendung auf ein mechanisches Problem S. 243

Ergänzung zu Kapitel VI. Weitere Beispiele für Grenzwerte und Stetigkeit 245

§ 1. Beispiele von Grenzwerten 245
1. Allgemeine Bemerkungen S. 245 – 2. Der Grenzwert von q^n S. 245 – 3. Der Grenzwert von $\sqrt[n]{p}$ S. 246 – 4. Unstetige Funktionen als Limites stetiger Funktionen S. 247 – 5. Grenzwerte durch Iteration S. 248

§ 2. Ein Beispiel für Stetigkeit 249

Siebentes Kapitel

Maxima und Minima

Einleitung 251

§ 1. Probleme aus der elementaren Geometrie 252
1. Die maximale Fläche eines Dreiecks mit zwei gegebenen Seiten S. 252 – 2. Der Satz des Heron. Extremaleigenschaften von Lichtstrahlen S. 252 – 3. Anwendungen auf Probleme für Dreiecke S. 253 – 4. Tangentialeigenschaften der Ellipse und Hyperbel. Entsprechende Extremaleigenschaften S. 254 – 5. Extreme Abstände von einer gegebenen Kurve S. 256

§ 2. Ein allgemeines Prinzip bei Extremalproblemen 258
1. Das Prinzip S. 258 – 2. Beispiele S. 259

§ 3. Stationäre Punkte und Differentialrechnung 260
1. Extremwerte und stationäre Punkte S. 260 – 2. Maxima und Minima von Funktionen mehrerer Variabeln. Sattelpunkte S. 261 – 3. Minimaxpunkte und Topologie S. 262 – 4. Der Abstand eines Punktes von einer Fläche S. 263

§ 4. Das Schwarzsche Dreiecksproblem 264
1. Der Schwarzsche Spiegelungsbeweis S. 264 – 2. Ein zweiter Beweis S. 265
3. Stumpfwinklige Dreiecke S. 267 – 4. Dreiecke aus Lichtstrahlen S. 267 – 5. Bemerkungen über Reflexionsprobleme und ergodische Bewegung S. 268

§ 5. Das Steinersche Problem 269
1. Das Problem und seine Lösung S. 269 – 2. Diskussion der beiden Alternativen S. 270 – 3. Ein komplementäres Problem S. 272 – 4. Bemerkungen und Übungen S. 272 – 5. Verallgemeinerung auf das Straßennetz-Problem S. 273

§ 6. Extrema und Ungleichungen 274
1. Das arithmetische und geometrische Mittel zweier positiver Größen S. 274
2. Verallgemeinerung auf n Variablen S. 275 – 3. Die Methode der kleinsten Quadrate S. 276

§ 7. Die Existenz eines Extremums. Das Dirichletsche Prinzip 277
1. Allgemeine Bemerkungen S. 277 – 2. Beispiele S. 279 – 3. Elementare Extremalprobleme S. 280 – 4. Schwierigkeiten bei komplizierteren Problemen S. 282

§ 8. Das isoperimetrische Problem 283

§ 9. Extremalprobleme mit Randbedingungen. Zusammenhang zwischen dem Steinerschen Problem und dem isoperimetrischen Problem 285

§ 10. Die Variationsrechnung 288
1. Einleitung S. 288 – 2. Die Variationsrechnung. Das Fermatsche Prinzip in der Optik S. 289 – 3. BERNOULLIS Behandlung des Problems der Brachystochrone S. 290 – 4. Geodätische Linien auf einer Kugel. Geodätische Linien und Maxi-Minima S. 291

§ 11. Experimentelle Lösungen von Minimumproblemen. Seifenhautexperimente . . . 292
1. Einführung S. 292 – 2. Seifenhautexperimente S. 293 – 3. Neue Experimente zum Plateauschen Problem S. 294 – 4. Experimentelle Lösungen anderer mathematischer Probleme S. 297

Achtes Kapitel

Die Infinitesimalrechnung

Einleitung 302

§ 1. Das Integral 303
1. Der Flächeninhalt als Grenzwert S. 303 – 2. Das Integral S. 304 – 3. Allgemeine Bemerkungen zum Integralbegriff. Endgültige Definition S. 307 – 4. Beispiele. Integration von x^n S. 308 – 5. Regeln der Integralrechnung S. 312

§ 2. Die Ableitung. 315
1. Die Ableitung als Steigung S. 315 – 2. Die Ableitung als Grenzwert S. 316 3. Beispiele S. 317 – 4. Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen S. 320 5. Differentiation und Stetigkeit S. 320 – 6. Ableitung und Geschwindigkeit. Zweite Ableitung und Beschleunigung S. 321 – 7. Die geometrische Bedeutung der zweiten Ableitung S. 323 – 8. Maxima und Minima S. 324

§ 3. Die Technik des Differenzierens 324

§ 4. Die Leibnizsche Schreibweise und das „Unendlich Kleine" 329

§ 5. Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung 331
1. Der Fundamentalsatz S. 331 – 2. Erste Anwendungen. Integration von x^r, $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{arc}\tan x$ S. 334 – 3. Die Leibnizsche Formel für π S. 336

§ 6. Die Exponentialfunktion und der Logarithmus 337
1. Definition und Eigenschaften des Logarithmus. Die Eulersche Zahl e S. 337 – 2. Die Exponentialfunktion S. 339 – 3. Differentiationsformeln für e^x, a^x, x^s S. 341 4. Explizite Ausdrücke für e, e^x und $\ln x$ als Limites S. 342 – 5. Unendliche Reihen für den Logarithmus. Numerische Berechnung S. 344

§ 7. Differentialgleichungen 346
1. Definition S. 346 – 2. Die Differentialgleichung der Exponentialfunktion. Radioaktiver Zerfall. Wachstumsgesetz. Zinseszins S. 346 – 3. Weitere Beispiele. Einfachste Schwingungen S. 349 – 4. NEWTONS Grundgesetz der Dynamik S. 351

Ergänzung zu Kapitel VIII 353

§ 1. Grundsätzliche Fragen 353
1. Differenzierbarkeit S. 353 – 2. Das Integral S. 355 – 3. Andere Anwendungen des Integralbegriffes. Arbeit. Länge S. 355

§ 2. Größenordnungen 358
1. Die Exponentialfunktion und die Potenzen von x S. 358 – 2. Die Größenordnung von $\ln(n!)$ S. 360

§ 3. Unendliche Reihen und Produkte 361
1. Unendliche Reihen von Funktionen S. 361 – 2. Die Eulersche Formel $\cos x + i \sin x = e^{ix}$ S. 365 – 3. Die harmonische Reihe und die Zeta-Funktion. Das Eulersche Produkt für den Sinus S. 367

§ 4. Ableitung des Primzahlsatzes mit statistischen Methoden 369

Anhang

Ergänzungen, Probleme und Übungsaufgaben 373
Arithmetik und Algebra 373
Analytische Geometrie 374
Geometrische Konstruktionen 379
Projektive und nichteuklidische Geometrie 380
Topologie 381
Funktionen, Grenzwerte und Stetigkeit 384
Maxima und Minima 384
Infinitesimalrechnung 386
Integrationstechnik 388
Hinweise auf weiterführende Literatur 392
Namen- und Sachverzeichnis 394