

Inhaltsverzeichnis

1	Vorgeschichte	1
1.1	Pythagoras und Euklid	1
1.2	Diophant	5
1.3	Bachet	8
1.4	Fermat	10
1.5	Euler	13
1.6	Gauß	21
1.7	Kummer und Dedekind	23
1.8	Übungen	26
2	Quadratische Zahlkörper	29
2.1	Quadratische Zahlkörper	29
2.2	Ganzheitsringe	31
2.3	Der Einheitskreis	33
2.4	Die Platonsche Hyperbel	35
2.5	Die Fibonacci-Hyperbel	38
2.6	Übungen	42
3	Teilbarkeit in Integritätsbereichen	47
3.1	Einheiten, prime und irreduzible Elemente	47
3.2	ZPE-Ringe	52
3.3	Hauptidealringe	54
3.4	Euklidische Ringe	56
3.5	Die diophantische Gleichung $y^2 = x^3 + 1$	58
3.6	Übungen	59
4	Arithmetik in einigen quadratischen Zahlkörpern	65
4.1	Die Gaußschen Zahlen	65
4.2	Die Eisensteinschen Zahlen	70
4.3	Der Lucas-Lehmer-Test	76
4.4	Euklidische quadratische Zahlkörper	81

4.5	Quadratische ZPE-Ringe	82
4.6	Übungen	85
5	Idealarithmetik in quadratischen Zahlkörpern	89
5.1	Motivation	89
5.2	Eindeutige Primidealzerlegung	94
5.3	Die Idealklassengruppe	101
5.4	Die diophantische Gleichung $y^2 = x^3 - d$	106
5.5	Übungen	111
6	Die Pellsche Gleichung	115
6.1	Die Lösbarkeit der Pellschen Gleichung	115
6.2	Welche Zahlen sind Normen?	120
6.3	Berechnung der Lösung der Pellschen Gleichung	123
6.4	Faktorisierungsalgorithmen	127
6.5	Übungen	129
7	Ambige Idealklassen und quadratische Reziprozität	131
7.1	Ambige Idealklassen	131
7.2	Die ambige Klassenzahlformel	135
7.3	Das quadratische Reziprozitätsgesetz	139
7.4	Übungen	141
8	Quadratische Gaußsche Summen	143
8.1	Dirichlet-Charaktere	143
8.2	Modularität und Reziprozität	148
8.3	Pell-Formen	152
8.4	Fekete-Polynome	156
8.5	Ausblick auf die analytische Klassenzahlformel	161
8.6	Übungen	164
A	Der Satz von Delaunay und Nagell	167
A.1	Einheiten in kubischen Zahlringen	167
A.2	Die Gleichung $x^3 + 2y^3 = 1$	169
A.3	Binomialeinheiten als Quadrate	171
B	Rechnen mit Pari und Sage	173
B.1	Pari	173
B.2	Sage	177
	Literatur	181
	Namensverzeichnis	185
	Sachverzeichnis	187