

# Table des matières

<b>Préface</b> .....	VII
<b>1 Introduction</b> .....	1
1.1 Sur les « Grands Systèmes » .....	1
1.1.1 Tentative de caractérisation .....	1
1.1.2 Quelques exemples typiques de grands systèmes .....	3
1.1.3 Problématiques en optimisation de grands systèmes ..	3
1.2 Avantages de la décomposition-coordination en optimisation .	6
1.2.1 Intérêt de l'optimisation des grands systèmes .....	6
1.2.2 Bénéfices de la décomposition .....	6
1.3 Un exemple en forme de contre-exemple .....	8
1.3.1 Formulation du problème .....	8
1.3.2 Une tentative de résolution par décomposition- coordination .....	8
1.3.3 Trouver l'erreur .....	9
1.4 Aperçu de l'ouvrage et prérequis .....	10
1.4.1 Partie « optimisation déterministe » .....	10
1.4.2 Partie « optimisation stochastique » .....	11
1.4.3 Prérequis du texte .....	12

---

## Partie I Optimisation déterministe

---

<b>2 Présentation élémentaire des méthodes de décomposition- coordination</b> .....	15
2.1 Premier modèle .....	15
2.1.1 Introduction du premier modèle .....	16
2.1.2 Décomposition « par les prix » .....	17
2.1.3 Décomposition « par les quantités » .....	23
2.1.4 Décomposition « par prédiction » .....	31

2.1.5	Une classification politico-économique des méthodes de décomposition-coordination . . . . .	41
2.2	Second modèle . . . . .	41
2.2.1	Introduction du second modèle . . . . .	42
2.2.2	Décomposition « par les prix » . . . . .	44
2.2.3	Décomposition « par les quantités » . . . . .	45
2.2.4	Décomposition « par prédiction » . . . . .	46
2.3	Annexe : à propos des séries divergentes . . . . .	47
2.4	Annexe : exercices sur la dualité . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Le PPA en optimisation déterministe sur un ensemble admissible . . . . .</b>	<b>55</b>
3.1	Cadre général . . . . .	56
3.1.1	Le problème . . . . .	57
3.1.2	Dérivée, gradient, sous-gradient . . . . .	57
3.1.3	Inéquations variationnelles et conditions d'optimalité . . . . .	58
3.2	Idée et algorithme de base . . . . .	59
3.3	Utilisations . . . . .	61
3.3.1	Algorithme proximal . . . . .	61
3.3.2	Algorithme du gradient et du gradient projeté . . . . .	61
3.3.3	Algorithme de Newton . . . . .	62
3.3.4	Décomposition . . . . .	63
3.4	Étude de la convergence . . . . .	64
3.4.1	Schéma général . . . . .	64
3.4.2	Convergence de l'Algorithme 3.3 . . . . .	65
3.4.3	Un cas de convergence de toute la suite . . . . .	71
3.4.4	Vitesse de convergence dans le cas $\mathcal{J}$ fortement convexe . . . . .	72
3.4.5	Quelques mots du cas sous-différentiable . . . . .	74
3.5	Variantes . . . . .	75
3.5.1	Augmentation de la fonction auxiliaire . . . . .	75
3.5.2	Relaxation . . . . .	76
3.5.3	Version séquentielle . . . . .	76
3.5.4	Linéarisation partielle . . . . .	77
3.6	Une application . . . . .	78
3.6.1	Exposé du problème . . . . .	78
3.6.2	Approche « ad hoc » . . . . .	78
3.6.3	Approche par le PPA . . . . .	79
3.7	Annexe : monotonie, forte monotonie et forte convexité . . . . .	81
3.8	Annexe : propriété de Lipschitz . . . . .	83
3.9	Annexe : propriété de Dunn . . . . .	85
<b>4</b>	<b>Le PPA en optimisation déterministe sous contraintes explicites . . . . .</b>	<b>89</b>
4.1	Le PPA et les problèmes de point selle . . . . .	90
4.2	Le PPA et la décomposition par les prix . . . . .	91

4.2.1	Obtention de l'algorithme général .....	91
4.2.2	Utilisations .....	92
4.2.3	Convergence .....	94
4.3	Le PPA et la décomposition par prédiction .....	102
4.3.1	Obtention de l'algorithme de point fixe .....	103
4.3.2	Utilisations .....	104
4.3.3	Convergence .....	106
4.3.4	Discussion de la condition géométrique .....	108
4.3.5	Obtention de l'algorithme d'Arrow-Hurwicz .....	110
4.4	Annexe : problèmes sous contraintes et dualité .....	114
4.4.1	Formulation et relation d'ordre dans un espace de Hilbert .....	115
4.4.2	Convexité et croissance en relation avec un cône positif .....	116
4.4.3	Cône positif dual .....	116
4.4.4	Lagrangien et dualité .....	117
4.5	Annexe : détail des calculs concernant la preuve du Théorème 4.15 .....	119
<b>5</b>	<b>Régularisation et Lagrangien augmenté .....</b>	<b>123</b>
5.1	Une introduction géométrique au Lagrangien augmenté .....	125
5.1.1	Le cas des contraintes égalité .....	125
5.1.2	Le cas des contraintes inégalité .....	130
5.2	Point de vue sur la régularisation de Moreau-Yosida .....	131
5.2.1	Bref rappel sur la transformée de Legendre-Fenchel .....	131
5.2.2	Bref rappel sur l'inf-convolution .....	132
5.2.3	Transmission de propriétés par l'inf-convolution .....	134
5.2.4	Zéro d'un opérateur et inf-convolution .....	136
5.2.5	Régularisation de Moreau-Yosida .....	137
5.3	Lagrangien augmenté et régularisation de la fonction duale .....	141
5.3.1	Une nouvelle définition du Lagrangien augmenté .....	141
5.3.2	Propriétés du Lagrangien augmenté .....	144
5.4	Lagrangien augmenté et algorithme de décomposition par les prix .....	146
5.4.1	Obtention de l'algorithme .....	146
5.4.2	Convergence .....	148

---

## Partie II Optimisation stochastique

---

<b>6</b>	<b>Introduction et motivations .....</b>	<b>153</b>
6.1	Problématique dans le cas déterministe .....	153
6.2	Extensions au cas stochastique .....	154
6.2.1	Cas statique .....	154
6.2.2	Cas dynamique .....	157
6.3	Un exemple statique et dynamique .....	163

<b>7</b>	<b>Vue d'ensemble de la méthode du gradient stochastique ...</b>	<b>167</b>
7.1	Position du problème .....	168
7.2	Algorithme du gradient stochastique .....	169
7.2.1	Description de l'algorithme .....	169
7.2.2	Exemple .....	171
7.2.3	Cadre probabiliste .....	172
7.3	Premiers résultats .....	173
7.3.1	Convergence .....	174
7.3.2	Vitesse de convergence .....	176
7.3.3	Interprétation .....	176
7.3.4	Discussion .....	177
7.3.5	Lemme technique .....	178
7.4	Lien avec l'approximation stochastique .....	178
7.4.1	Théorème de Robbins-Monro .....	179
7.4.2	Normalité asymptotique .....	180
7.5	Efficacité asymptotique et moyennisation .....	183
7.5.1	Algorithme de Newton stochastique .....	183
7.5.2	Moyennisation .....	185
7.6	Considérations pratiques .....	186
7.6.1	Critère d'arrêt .....	187
7.6.2	Réglage de l'algorithme standard .....	187
7.6.3	Réglage de l'algorithme moyenné .....	188
7.6.4	Illustration numérique .....	189
7.7	Conclusion .....	193
<b>8</b>	<b>Le PPA stochastique sur un ensemble admissible .....</b>	<b>195</b>
8.1	Algorithme du PPA stochastique .....	196
8.2	Théorème de convergence .....	197
8.3	Conclusion .....	203
8.4	Annexe : théorème de Robbins-Siegmund et lemme technique .....	204
8.5	Annexe : intégrande normale et sélection mesurable .....	207
<b>9</b>	<b>Le PPA stochastique sous contraintes explicites .....</b>	<b>209</b>
9.1	Rappels du cas déterministe .....	209
9.1.1	Algorithmes d'Uzawa et d'Arrow-Hurwicz .....	210
9.1.2	Principe du Problème Auxiliaire .....	210
9.2	Extension stochastique de l'algorithme d'Uzawa ? .....	211
9.2.1	Tentative d'algorithme d'Uzawa stochastique .....	211
9.2.2	Contre-exemple .....	212
9.2.3	Conclusion .....	213
9.3	Extension stochastique de l'algorithme issu du PPA .....	214
9.4	Théorème de convergence sous condition de stabilité du Lagrangien en $u$ .....	216
9.5	Cas fortement convexe : utilisation de grands pas .....	221
9.6	Cas simplement convexe et Lagrangien augmenté .....	226

9.7	Conclusion .....	233
<b>10</b>	<b>Extensions de la méthode du gradient stochastique .....</b>	<b>235</b>
10.1	Contrainte en espérance et Lagrangien.....	235
10.2	Perspectives.....	245

---

### Partie III Problèmes et corrigés

---

<b>Problèmes .....</b>	<b>251</b>
11.1 Réseau de distribution d'eau .....	251
11.1.1 Première question : formulation variationnelle.....	253
11.1.2 Deuxième question : courbe caractéristique débit-pression.....	253
11.1.3 Troisième question : décomposition en trois sous-systèmes .....	254
11.1.4 Quatrième question : décomposition par les prix .....	254
11.1.5 Cinquième question : décomposition par les quantités ..	255
11.1.6 Sixième question : décomposition par prédiction.....	255
11.2 Investissement et production .....	255
11.2.1 Première question : décomposition par les prix .....	256
11.2.2 Deuxième question : décomposition par les quantités ..	256
11.2.3 Troisième question : décomposition par prédiction ....	257
11.3 Décomposition de trajectoire .....	257
11.3.1 Questions préliminaires .....	257
11.3.2 Décomposition par les prix en deux phases .....	258
11.3.3 Décomposition par les quantités en deux phases.....	259
11.3.4 Décomposition par prédiction en deux phases .....	259
11.3.5 Décomposition en trois phases .....	260
11.4 Gestion des stocks sur un réseau .....	260
11.4.1 Décomposition par les prix .....	262
11.4.2 Décomposition par prédiction .....	263
11.5 Optimisation avec recours.....	264
11.6 Compromis entre investissement et fonctionnement.....	265
<b>Corrigés des exercices et problèmes.....</b>	<b>269</b>
12.1 Exercices du Chapitre 1 .....	269
12.2 Exercices du Chapitre 2 .....	270
12.3 Exercices du Chapitre 3 .....	283
12.4 Exercices du Chapitre 4 .....	283
12.5 Exercices du Chapitre 5 .....	288
12.6 Exercices du Chapitre 8 .....	293
12.7 Problème de la section 11.1 .....	293
12.7.1 Première question : formulation variationnelle.....	293

12.7.2	Deuxième question : courbe caractéristique débit-pression.....	294
12.7.3	Troisième question : décomposition en trois sous-systèmes.....	295
12.7.4	Quatrième question : décomposition par les prix .....	295
12.7.5	Cinquième question : décomposition par les quantités ..	296
12.7.6	Sixième question : décomposition par prédiction.....	297
12.8	Problème de la section 11.2 .....	298
12.8.1	Première question : décomposition par les prix .....	298
12.8.2	Deuxième question : décomposition par les quantités ..	299
12.8.3	Troisième question : décomposition par prédiction ....	301
12.9	Problème de la section 11.3 .....	302
12.9.1	Questions préliminaires.....	302
12.9.2	Décomposition par les prix en deux phases .....	303
12.9.3	Décomposition par les quantités en deux phases .....	303
12.9.4	Décomposition par prédiction en deux phases .....	304
12.9.5	Décomposition en trois phases .....	304
12.10	Problème de la section 11.4 .....	305
12.10.1	Décomposition par les prix .....	305
12.10.2	Décomposition par prédiction .....	307
12.11	Problème de la section 11.5 .....	310
12.12	Problème de la section 11.6 .....	312
<b>Postface .....</b>		<b>319</b>
<b>Littérature .....</b>		<b>325</b>
<b>Index .....</b>		<b>331</b>