

Inhalt

0	Lineare Geometrie im n-dimensionalen reellen Raum	1
0.1	Der n -dimensionale reelle Raum	1
0.1.1	Zahlen	1
0.1.2	Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$	7
0.1.3	Multiplikation von Vektoren	11
0.2	Geraden	12
0.2.1	Ausblick	12
0.2.2	Geraden im $\mathbb{R}^n$	12
0.2.3	Geraden in der Ebene	16
0.3	Abstände und Winkel	20
0.3.1	Das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$	20
0.3.2	Anwendungen in der Elementargeometrie	22
0.3.3	Winkel im $\mathbb{R}^n$	26
0.3.4	Senkrechte Vektoren und Abstände	33
0.3.5	Die HESSEsche Normalform einer Geradengleichung	35
0.3.6	Lineare Unabhängigkeit	38
0.3.7	Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$	41
0.3.8	Abstand von Geraden	46
0.4	Ebenen	51
0.4.1	Ebenen im $\mathbb{R}^n$	51
0.4.2	Ebenen im $\mathbb{R}^3$	55
0.4.3	Abstand eines Punktes von einer Ebene	59
0.4.4	Das Spatprodukt	61
0.5	Lineare Gleichungssysteme	64
0.5.1	Zwei Geraden in der Ebene	64
0.5.2	Beschreibung durch Matrizen	66
0.5.3	Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform	67
0.5.4	Das GAUSSsche Eliminationsverfahren	73
0.5.5	Wahl der Pivots und Rundungsfehler	77

1	Grundlagen	81
1.1	Mengen, Relationen, Abbildungen	81
1.1.1	Mengen und Teilmengen	81
1.1.2	Operationen mit Mengen	83
1.1.3	Abbildungen	85
1.1.4	Abzählbare Mengen*	89
1.1.5	Äquivalenzrelationen*	93
1.2	Halbgruppen und Gruppen	98
1.2.1	Die natürlichen Zahlen*	98
1.2.2	Verknüpfungen und Halbgruppen	103
1.2.3	Gruppen	105
1.2.4	Die ganzen Zahlen als additive Gruppe*	108
1.2.5	Untergruppen und Homomorphismen	112
1.3	Ringe und Körper	114
1.3.1	Die ganzen Zahlen als Ring*	114
1.3.2	Der Körper der rationalen Zahlen	119
1.3.3	Dezimalbruchentwicklung rationaler Zahlen*	126
1.3.4	Konstruktion der reellen Zahlen*	130
1.3.5	Reelle Zahlen als Dezimalbrüche*	138
1.3.6	Komplexe Zahlen	143
1.3.7	Endliche Körper*	149
1.3.8	Rückblick und Ausblick	155
1.4	Polynome*	157
1.4.1	Polynome und Polynomfunktionen	157
1.4.2	Der Ring der Polynome	158
1.4.3	Division mit Rest	160
1.4.4	Nullstellen von Polynomen	161
1.4.5	Eine Vorzeichenregel für reelle Polynome	165
1.4.6	Der Fundamentalsatz der Algebra	167
2	Vektorräume und lineare Abbildungen	173
2.1	Grundlagen	174
2.1.1	Vektorräume	174
2.1.2	Untervektorräume	177
2.1.3	Operationen mit Untervektorräumen	178
2.1.4	Lineare Unabhängigkeit	181
2.2	Basis und Dimension	188
2.2.1	Erzeugendensysteme und Basen	188
2.2.2	Dimension eines Vektorraums	191
2.2.3	Charakterisierungen einer Basis	196
2.2.4	Praktische Verfahren zur Bestimmung einer Basis	199
2.2.5	Summen und direkte Summen	203
2.2.6	Der Rang einer Matrix	210

2.3	Lineare Abbildungen	216
2.3.1	Definitionen und Beispiele	216
2.3.2	Elementare Eigenschaften linearer Abbildungen	220
2.3.3	Spezielle lineare Abbildungen	223
2.3.4	Eine Dimensionsformel für lineare Abbildungen	227
2.3.5	Lineare Gleichungssysteme	229
2.3.6	Quotientenvektorräume*	234
2.4	Lineare Abbildungen und Matrizen	240
2.4.1	Erzeugung linearer Abbildungen	240
2.4.2	Die darstellende Matrix einer linearen Abbildung	242
2.4.3	Multiplikation von Matrizen	247
2.4.4	Rechenregeln für Matrizen	251
2.4.5	Die allgemeine lineare Gruppe	255
2.4.6	Elementarmatrizen	257
2.4.7	Lineare Gleichungssysteme und Elementarmatrizen*	264
2.4.8	Die LR-Zerlegung*	265
2.4.9	Dualität*	268
2.5	Transformationen	271
2.5.1	Basistransformationen und Koordinatentransformationen	271
2.5.2	Transformationsformel für lineare Abbildungen	274
2.5.3	Eine Normalform für darstellende Matrizen	276
3	Determinanten	281
3.1	Motivation	281
3.1.1	Lineare Gleichungssysteme	281
3.1.2	Flächeninhalt und Orientierung	282
3.2	Berechnung von Determinanten	287
3.2.1	Axiome für Determinanten	287
3.2.2	Weitere Eigenschaften der Determinante	290
3.2.3	Permutationen	298
3.2.4	Die alternierende Gruppe	304
3.2.5	Existenz und Eindeutigkeit	305
3.3	Minoren	311
3.3.1	Die komplementäre Matrix	311
3.3.2	LAPLACE-Entwicklung	313
3.3.3	Die CRAMERSche Regel	314
4	Eigenwerte	315
4.1	Grundbegriffe	315
4.1.1	Eigenwerte und Eigenvektoren	315
4.1.2	Endomorphismen des $\mathbb{R}^2$	318
4.1.3	Differentialgleichungen*	320
4.1.4	Das charakteristische Polynom	325

4.2	Diagonalisierung und Trigonalisierung	329
4.2.1	Diagonalisierbarkeit	329
4.2.2	Geometrische und algebraische Vielfachheit	331
4.2.3	Rechenverfahren zur Diagonalisierung	335
4.2.4	Trigonalisierung*	337
4.2.5	Zerlegung in Haupträume*	343
4.2.6	Nilpotente Endomorphismen*	349
4.2.7	Die JORDANSche Normalform*	356
4.2.8	Gedämpfte Schwingungen*	358
5	Bilineare Algebra und Geometrie	363
5.1	Kegelschnitte*	363
5.1.1	Die Gleichungen der ebenen Schnitte eines Kreiskegels	363
5.1.2	Geometrische Eigenschaften der Kegelschnitte*	366
5.1.3	Kegelschnitte durch vorgegebene Punkte*	370
5.1.4	Pol und Polare*	377
5.2	Bilinearformen	380
5.2.1	Definitionen und beschreibende Matrix	380
5.2.2	Transformationsformel für darstellende Matrizen	383
5.2.3	Entartung und Rang einer Bilinearform	384
5.2.4	Diagonalisierung einer symmetrischen Bilinearform	385
5.2.5	Das Trägheitsgesetz von SYLVESTER*	390
5.2.6	Exkurs über affine Geometrie*	393
5.2.7	Quadriken*	396
5.3	Euklidische und unitäre Vektorräume	409
5.3.1	Hermiteische Formen	409
5.3.2	Definitheit	410
5.3.3	Orthogonalität	418
5.3.4	QR-Zerlegung und Methode der kleinsten Quadrate*	424
5.3.5	Orthogonale und unitäre Endomorphismen	429
5.3.6	Die Gruppe $SO(3)^*$	436
5.3.7	Selbstadjungierte Endomorphismen	443
5.3.8	Die Singulärwert-Zerlegung*	448
5.3.9	Hauptachsentransformation von Quadriken*	451
5.3.10	Der Trägheitstensor*	461
5.3.11	Ausblick	469
	Literaturverzeichnis	471
	Index	473
	Symbolverzeichnis	479