

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlagen .....</b>	<b>15</b>
1.1	Aussagen.....	15
1.2	Mengen .....	18
1.3	Abbildungen und Verknüpfungen .....	21
1.4	Die reellen Zahlen und Teilmengen der reellen Zahlen.....	22
1.4.1	Eigenschaften der reellen Zahlen .....	22
1.4.2	Wichtige Teilmengen der reellen Zahlen.....	25
1.5	Summen, Produkte und vollständige Induktion .....	25
1.6	Aufgaben.....	29
<b>2</b>	<b>Komplexe Zahlen und algebraische Gleichungen.....</b>	<b>30</b>
2.1	Komplexe Zahlen .....	31
2.1.1	Einführung.....	31
2.1.2	Grundbegriffe .....	33
2.1.3	Rechenoperationen .....	34
2.1.4	Exponentielle Darstellung von komplexen Zahlen .....	36
2.1.5	Anwendungen.....	41
2.2	Algebraische Gleichungen .....	45
2.3	Aufgaben.....	50
<b>3</b>	<b>Vektorrechnung.....</b>	<b>51</b>
3.1	Einführung und Grundbegriffe .....	51
3.2	Rechnen mit Vektoren .....	54
3.2.1	Addition von Vektoren und Multiplikation mit einer Zahl .....	54
3.2.2	Skalarprodukt und Betrag von Vektoren .....	55
3.2.3	Winkel zwischen Vektoren, Zerlegung von Vektoren.....	57
3.2.4	Basisvektoren .....	60
3.2.5	Das Vektorprodukt .....	61
3.2.6	Das Spatprodukt und Mehrfachprodukte.....	63
3.3	Vektorrechnung und Geometrie .....	65

---

3.3.1	Punkte im Raum.....	65
3.3.2	Geraden im Raum .....	65
3.3.3	Ebenen im Raum .....	66
3.3.4	Abstände .....	66
3.3.5	Winkel.....	69
3.4	Aufgaben .....	71
<b>4</b>	<b>Matrizen, Determinanten und lineare Gleichungssysteme .....</b>	<b>73</b>
4.1	Matrizen und Determinanten.....	74
4.1.1	Grundbegriffe und spezielle Matrizen .....	74
4.1.2	Addition und Multiplikation von Matrizen .....	77
4.1.2.1	Addition von Matrizen und Multiplikation mit einer Zahl.....	77
4.1.2.2	Multiplikation von Matrizen und inverse Matrix .....	78
4.1.3	Determinante einer Matrix .....	81
4.1.4	Inversion einer Matrix mit Determinanten.....	86
4.2	Lineare Gleichungssysteme .....	88
4.2.1	Lösung mit dem Gaußschen Algorithmus .....	89
4.2.2	Lösung mit Determinanten: Cramersche Regel.....	96
4.2.3	Inversion von Matrizen als Lösung von Gleichungssystemen .....	97
4.2.4	Kondition eines Gleichungssystems .....	100
4.3	Aufgaben .....	102
<b>5</b>	<b>Funktionen von einer Variablen .....</b>	<b>105</b>
5.1	Grundlagen.....	106
5.2	Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen.....	116
5.2.1	Folgen.....	116
5.2.2	Grenzwert einer Funktion.....	118
5.2.2.1	Grenzwert für $x \rightarrow x_0$ .....	118
5.2.2.2	Grenzwert für $x \rightarrow \pm \infty$ und Asymptoten .....	121
5.2.3	Stetigkeit einer Funktion.....	122
5.3	Elementare Funktionen .....	123
5.3.1	Polynomfunktion .....	123
5.3.2	Gebrochenrationale Funktionen .....	125
5.3.3	Die Exponentialfunktion .....	127
5.3.3.1	Definition und Eigenschaften der Exponentialfunktion .....	128
5.3.3.2	Anwendungsbeispiele der Exponentialfunktion.....	131
5.3.4	Die Logarithmusfunktion .....	132
5.3.5	Die Exponentialfunktion zur Basis a .....	133
5.3.6	Die Logarithmusfunktion zur Basis a .....	134

---

5.3.7	Potenz- und Wurzelfunktionen .....	136
5.3.8	Trigonometrische Funktionen.....	139
5.3.9	Arkusfunktionen .....	144
5.3.10	Hyperbelfunktionen .....	146
5.3.11	Areafunktionen.....	148
5.4	Aufgaben.....	149
<b>6</b>	<b>Differentialrechnung mit Funktionen einer Variablen .....</b>	<b>152</b>
6.1	Einführung und Grundlagen .....	152
6.2	Ableitungsregeln .....	157
6.3	Ableitung elementarer Funktionen .....	160
6.4	Berechnung von Grenzwerten .....	161
6.5	Extrema, Krümmung und Wendepunkte .....	164
6.5.1	Extrema von Funktionen .....	164
6.5.2	Krümmung einer Funktion und Wendepunkte.....	175
6.6	Kurvendiskussion.....	178
6.7	Anwendungsbeispiele .....	181
6.8	Aufgaben.....	183
<b>7</b>	<b>Integralrechnung mit Funktionen von einer Variablen .....</b>	<b>185</b>
7.1	Einführung und Grundlagen .....	185
7.2	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung .....	188
7.3	Grundintegrale .....	191
7.4	Eigenschaften des Integrals.....	192
7.5	Integrationsmethoden.....	193
7.5.1	Partielle Integration .....	193
7.5.2	Integration durch Substitution .....	194
7.5.3	Logarithmische Integration.....	197
7.5.4	Integration durch Partialbruchzerlegung.....	198
7.6	Uneigentliche Integrale .....	200
7.7	Anwendungsbeispiele .....	203
7.8	Aufgaben.....	206
<b>8</b>	<b>Reihen und Reihenentwicklung von Funktionen .....</b>	<b>208</b>
8.1	Grundlagen .....	210
8.1.1	Die endliche geometrische Reihe.....	210
8.1.2	Unendliche Reihen .....	211
8.2	Potenzreihen.....	213
8.3	Taylorreihen, Taylorentwicklung .....	215
8.4	Fourierreihen, Fourierentwicklung .....	222

---

8.5	Aufgaben .....	229
<b>9</b>	<b>Der n-dimensionale Raum und Raumkurven .....</b>	<b>231</b>
9.1	Der n-dimensionale Raum .....	231
9.1.1	Grundbegriffe .....	231
9.1.2	Koordinaten im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ .....	234
9.1.2.1	Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$ .....	234
9.1.2.2	Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ .....	235
9.1.2.3	Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ .....	235
9.2	Raumkurven.....	237
9.2.1	Tangential- und Normalenvektoren.....	239
9.2.2	Bogenlänge.....	241
9.2.3	Krümmung .....	243
9.3	Aufgaben .....	245
<b>10</b>	<b>Differenzialrechnung mit Funktionen von mehreren Variablen .....</b>	<b>246</b>
10.1	Funktionen von mehreren Variablen.....	246
10.2	Partielle Ableitung und partielle Differenzierbarkeit .....	249
10.3	Differenzierbarkeit, Linearisierung und Taylorentwicklung .....	253
10.3.1	Differenzierbarkeit und totales Differenzial.....	253
10.3.2	Ableitung nach einem Parameter .....	257
10.3.3	Taylorentwicklung .....	258
10.4	Extrema von Funktionen von mehreren Variablen.....	261
10.4.1	Extrema ohne Nebenbedingungen.....	262
10.4.2	Extrema mit Nebenbedingungen.....	272
10.5	Aufgaben .....	278
<b>11</b>	<b>Integralrechnung mit Funktionen von mehreren Variablen .....</b>	<b>279</b>
11.1	Bereichsintegrale .....	279
11.1.1	Bereichsintegral einer Funktion von zwei Variablen .....	279
11.1.1.1	Integration in kartesischen Koordinaten .....	281
11.1.1.2	Integration in Polarkoordinaten.....	286
11.1.2	Bereichsintegral einer Funktion von drei Variablen.....	290
11.1.2.1	Integration in kartesischen Koordinaten .....	291
11.1.2.2	Integration in Zylinderkoordinaten .....	293
11.1.2.3	Integration in Kugelkoordinaten .....	294
11.2	Kurvenintegrale.....	296
11.3	Aufgaben .....	300

---

<b>12</b>	<b>Gewöhnliche Differenzialgleichungen.....</b>	<b>302</b>
12.1	Einführung und Grundlagen .....	304
12.2	Gewöhnliche Differenzialgleichungen erster Ordnung.....	306
12.2.1	Separable Differenzialgleichungen: Trennung der Variablen .....	306
12.2.2	Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung.....	311
12.2.2.1	Homogene lineare Differenzialgleichung erster Ordnung .....	311
12.2.2.2	Inhomogene lineare Differenzialgleichung erster Ordnung.....	312
12.3	Gewöhnliche Differenzialgleichungen zweiter Ordnung .....	314
12.3.1	Homogene lineare Differenzialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten .....	315
12.3.2	Inhomogenen lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten .....	319
12.4	Aufgaben.....	324
<b>13</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsrechnung .....</b>	<b>326</b>
13.1	Kombinatorik .....	327
13.1.1	Permutationen .....	327
13.1.2	Variationen .....	329
13.1.3	Kombinationen.....	331
13.1.4	Zusammenfassung.....	333
13.1.5	Aufgaben zu Abschnitt 13.1 .....	333
13.2	Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeit.....	334
13.2.1	Zufallsexperimente .....	334
13.2.2	Klassische Wahrscheinlichkeit nach Laplace .....	335
13.2.3	Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung.....	339
13.2.4	Bedingte Wahrscheinlichkeit, stochastische Unabhängigkeit, totale Wahrscheinlichkeit und Formel von Bayes.....	340
13.2.5	Zusammenfassung.....	343
13.2.6	Aufgaben zu Abschnitt 13.2 .....	345
13.3	Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilung.....	347
13.3.1	Diskrete Zufallsvariablen .....	348
13.3.1.1	Wahrscheinlichkeitsfunktion und Verteilungsfunktion .....	348
13.3.1.2	Parameter einer diskreten Verteilung.....	350
13.3.2	Stetige Zufallsvariablen .....	352
13.3.2.1	Verteilungsfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte.....	352
13.3.2.2	Parameter einer stetigen Verteilung .....	354
13.3.3	Zweidimensionale stetige Zufallsvariablen.....	356
13.3.3.1	Verteilungsfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte.....	357
13.3.3.2	Parameter einer zweidimensionalen Zufallsvariablen .....	360
13.3.3.3	Summen von Zufallsvariablen .....	361

---

13.4	Spezielle Verteilungen.....	363
13.4.1	Diskrete Verteilungen .....	364
13.4.1.1	Die Binomialverteilung .....	364
13.4.1.2	Die hypergeometrische Verteilung.....	366
13.4.1.3	Die Poissonverteilung .....	369
13.4.2	Stetige Verteilungen .....	370
13.4.2.1	Die Normalverteilung .....	370
13.4.2.2	Die Lognormalverteilung.....	373
13.4.2.3	Die Exponentialverteilung .....	375
13.4.2.4	Die Weibullverteilung .....	377
13.4.2.5	Die t-Verteilung.....	378
13.4.2.6	Die Chi-Quadrat-Verteilung .....	379
13.4.2.7	Die F-Verteilung.....	380
13.4.3	Anwendungsbeispiele in der Qualitätssicherung.....	381
13.4.4	Die zweidimensionale Normalverteilung.....	384
13.5	Grenzwertsätze und Näherungen.....	386
13.5.1	Die Binomialverteilung als Näherung für die hypergeometrische Verteilung .....	386
13.5.2	Die Poissonverteilung als Näherung für die Binomialverteilung .....	387
13.5.3	Der zentrale Grenzwertsatz und das Gesetz der großen Zahlen.....	387
13.6	Aufgaben zu den Abschnitten 13.3 bis 13.5 .....	392
<b>14</b>	<b>Deskriptive Statistik .....</b>	<b>394</b>
14.1	Einführung und Grundbegriffe .....	394
14.2	Univariate deskriptive Statistik .....	396
14.2.1	Häufigkeitsverteilung und grafische Darstellungen.....	397
14.2.1.1	Keine Klassenbildung.....	397
14.2.1.2	Klassenbildung .....	398
14.2.2	Maßzahlen .....	402
14.2.2.1	Lagemaßzahlen .....	402
14.2.2.2	Streuungsmaßzahlen .....	406
14.2.2.3	Konzentrationsmaßzahl: Gini-Koeffizient.....	407
14.3	Bivariate deskriptive Statistik .....	410
14.3.1	Häufigkeitstabellen und grafische Darstellungen .....	410
14.3.2	Maßzahlen .....	413
14.4	Aufgaben .....	415
<b>15</b>	<b>Schließende Statistik .....</b>	<b>416</b>
15.1	Einführung und Grundbegriffe .....	416

---

15.2	Schätzen von Parametern .....	417
15.2.1	Eigenschaften von Schätzfunktionen.....	418
15.2.2	Maximum-Likelihood-Schätzung .....	420
15.2.3	Konfidenzintervalle .....	422
15.2.4	Aufgaben zu Abschnitt 15.2 .....	430
15.3	Statistische Tests.....	432
15.3.1	Einführung, Grundbegriffe und Vorgehensweise bei Tests.....	432
15.3.2	Spezielle Parametertests .....	443
15.3.2.1	Test für den Erwartungswert einer normalverteilten Größe .....	443
15.3.2.2	Test für die Varianz einer normalverteilten Größe .....	444
15.3.2.3	Test für den Erwartungswert einer beliebig verteilten Größe.....	444
15.3.2.4	Test für den Parameter $p$ einer binomialverteilten Größe .....	445
15.3.2.5	Test für den Vergleich der Erwartungswerte zweier Größen.....	447
15.3.2.6	Test für den Vergleich der Varianzen zweier normalverteilter Größen .....	448
15.3.2.7	Test für den Vergleich der Parameter zweier binomialverteilter Größen .....	449
15.3.2.8	Test für den Korrelationskoeffizienten einer zweidimensionalen Normalverteilung .....	449
15.3.3	Der Chi-Quadrat-Anpassungstest .....	451
15.3.4	Unabhängigkeitstests- und Homogenitätstests.....	454
15.3.4.1	Der Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest .....	454
15.3.4.2	Der Chi-Quadrat-Homogenitätstest .....	456
15.3.5	Der Mann-Whitney-Wilcoxon-Test .....	457
15.3.6	Aufgaben zu Abschnitt 15.3 .....	459
<b>16</b>	<b>Lineare Optimierung .....</b>	<b>463</b>
16.1	Grafische Lösung und Simplex-Algorithmus .....	463
16.1.1	Grafische Lösung .....	465
16.1.2	Der Simplex-Algorithmus.....	467
16.1.3	Sonderfälle .....	476
16.1.4	Zusammenfassung des Simplex-Algorithmus.....	484
16.1.5	Aufgaben zu Abschnitt 16.1 .....	486
16.2	Transportprobleme .....	487
16.2.1	Die Struktur von Transportproblemen .....	487
16.2.2	Der Transportalgorithmus .....	491
16.2.3	Aufgaben zu Abschnitt 16.2 .....	495
<b>17</b>	<b>Mathematik mit dem Computer .....</b>	<b>497</b>
17.1	Einführung.....	497

---

17.2 Lösung mathematischer Probleme mit Maple.....	503
17.2.1 Einführung.....	503
17.2.2 Lösungsbeispiele.....	505
17.2.2.1 Lösen von Gleichungen.....	505
17.2.2.2 Rechnen mit komplexen Zahlen.....	507
17.2.2.3 Vektoren, Matrizen, lineare Gleichungssysteme .....	509
17.2.2.4 Funktionsgraphen .....	512
17.2.2.5 Differentialrechnung .....	514
17.2.2.6 Integralrechnung .....	515
17.2.2.7 Summen, unendliche Reihen und Reihenentwicklung von Funktionen .....	517
17.2.2.8 Grenzwerte.....	518
17.2.2.9 Differentialgleichungen .....	518
17.2.2.10 Wahrscheinlichkeitsrechnung.....	518
17.2.2.11 Lineare Optimierung.....	520
<b>A Lösungen der Aufgaben .....</b>	<b>521</b>
<b>B Statistik-Tabellen.....</b>	<b>568</b>
B.1 Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.....	568
B.2 Quantile der t-Verteilung .....	569
B.3 Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung .....	570
B.4 Quantile der F-Verteilung.....	572
B.5 Werte für den Mann-Whitney-Wilcoxon-Test .....	588
<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>590</b>
<b>Sachwortverzeichnis .....</b>	<b>593</b>