

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	11
1.1	Vorwort	11
1.2	Kapitelübersicht	12
1.3	Was versteht man unter q -Analysis?	17
1.3.1	Einfache Reihenmanipulationen	20
1.4	Aktueller Stand der q -Analysis	21
1.4.1	Aktuelle Lehrbücher zu diesem Thema	22
1.4.2	Vergleich mit komplexer Analysis	22
1.5	Vergleich mit der Nichtstandardanalysis	22
1.6	Vergleich mit den Einheiten der Physik	23
1.7	Analogien zwischen der q -Analysis und der Analysis	28
1.8	Die ersten q -Funktionen	30
2	Die verschiedenen "q-Sprachen"	39
2.1	Schulen-Traditionen	40
2.2	Sonstige Schulen	43
2.2.1	Verschiedene Notationen	47
2.3	Differenzenrechnung und Bernoulli-Zahlen	48
2.4	Umbral-Kalkül, Interpolationstheorie	49
2.5	Elliptische und Theta-Schulen und Notationen, die ältesten Wurzeln- q - Vorläufer	51
2.6	Trigonometrie, Prosthaphaeresis, Logarithmen,	53
2.7	Die Entwicklung der Analysis	55
2.8	Die Faulhabersche Mathematik	60
2.9	Descartes, Leibniz, Hindenburg, Arbogast	61
2.10	Die Fakultäten	64
2.11	Königsberger Schule	66
2.12	Wiener Schule	67
2.13	Vorspiel: Johann von Grison	67
2.14	Göttinger Schule	67
2.15	Die kombinatorische Schule: Gudermann, Grünert	68
2.16	Heidelberger Schule	69
2.17	Weierstraß, Formale Potenzreihen und die Γ -Funktion	70
2.18	Hallenser q -Analysis-Schule	71
2.19	Jakob Friedrich Fries, Martin Ohm, Babbage, Peacock und Herschel	72
2.20	Verschiedene Stilarten in der q -Analysis	76

3	Pre q-Analysis	77
3.1	Die frühe Verbindung zwischen analytischer Zahlentheorie und q -Reihen	77
3.2	Einige Aspekte von kombinatorischen Identitäten	78
3.2.1	Faà di Brunosche Formel	80
3.3	Die Dualität zwischen Stirling und Bernoulli-Zahlen	80
3.4	Tangente-Zahlen, Euler-Zahlen	81
3.5	Das Auftreten von Binomialkoeffizient-Identitäten in der Literatur	82
3.6	Neunzehntes Jahrhundert: Catalan, Grigoriev, Imchenetsky...	82
3.7	Eine kurze Geschichte der hypergeometrischen Reihen	83
3.7.1	Die Γ -Funktion	84
3.7.2	Saalschützsche und balancierte hypergeometrische Reihen	84
3.7.3	Fraktionale Ableitung	85
3.7.4	Newton, Taylor, Stirling, Montmort	86
3.7.5	Eulers Beitrag	86
3.7.6	Vandermonde- und Pfaffsche Summationsformeln	87
3.7.7	Kegelschnitte im siebzehnten Jahrhundert	87
3.7.8	Der Begriff der Unendlichkeit in England	88
3.7.9	Der Begriff der Unendlichkeit bei Euler	88
3.7.10	Der Begriff der Unendlichkeit, die Binomialkoeffizienten	88
3.7.11	Die Beiträge von Gauß	89
3.7.12	Die Beiträge von Clausen und Jacobi	90
3.7.13	Kummers Beitrag	91
3.7.14	Die Beiträge von Cauchy, Riemann, Heine, Thomae und Papperitz	92
3.7.15	1880–1914; Sonine, Goursat, Stieltje, Schafheitlin, Pochhammer, Mellin	93
3.7.16	Erste Hälfte des 20. Jahrhunderts, England, USA	94
3.7.17	Spezielle Funktionen, die durch Integrale definiert sind	97
3.7.18	Zweite Hälfte des 20. Jahrhunderts	98
3.8	Die Jacobi-Theta-Funktionen, unterschiedliche Notationen und Eigenschaften	98
3.9	Meromorphe Fortsetzung und Riemannsche Flächen	103
3.10	Wellengleichung	105
3.11	Orthogonale Polynome	105
3.12	Legendre-d'Allonville-Murphy-Polynome	105
3.12.1	Verallgemeinerte Laguerre-Polynome	106
3.13	Jacobi-Polynome	108
3.14	Hermite-Polynome	108
4	Das q-Umbral-Kalkül und die Halbgruppen. Die Nørlundsche Differenzenrechnung	109
4.1	Das q -Umbral-Kalkül und die Halbgruppen	110
4.2	Endliche Differenzen	116
4.3	q -Appellsche Polynome	125
4.3.1	Die verallgemeinerten q -Bernoulli-Polynome	128

4.3.2	Die Wardschen q -Bernoulli-Zahlen	129
4.3.3	Die verallgemeinerten JHC q -Bernoulli-Polynome	134
4.3.4	NWA q -Euler-Polynome	138
4.3.5	Die NWA verallgemeinerten q -Euler-Zahlen	139
	Die JHC verallgemeinerten q -Euler-Polynome	141
4.3.6	Mehrere Veränderliche, n negativ	144
4.3.7	q -Euler-Maclaurinsche Entwicklungen	148
4.3.8	JHC Polynome von mehreren Veränderlichen; negative Ordnung .	151
4.3.9	JHC q -Euler-Maclaurinsche Entwicklungen	154
4.3.10	Eulers symbolische Formel	157
4.3.11	Ergänzende Funktionswert-Sätze	160
4.4	q -Lucas und q -G-Polynome	160
4.4.1	q -Lucas-Zahlen	163
4.4.2	Die q -G-Polynome	165
4.4.3	q -Lucas- und G-Polynome von negativer Ordnung	168
4.4.4	Entwicklungsformeln	171
4.5	Der Halbring der Wardschen Zahlen	173
5	q-Stirlingsche Zahlen	175
5.1	Einleitung	175
5.2	Der Hahn-Cigler-Carlitz-Johnsonsche Ansatz	177
5.3	Der Carlitz-Gouldsche Ansatz	188
5.4	Die Jacksonsche q -Ableitung als Differenzenoperator	193
5.5	Anwendungen	195
6	Die ersten q-Funktionen	197
6.1	q -Analogon, q -Faktorielle, Schlange-Operator	197
6.2	Die q -Ableitung	202
6.3	Das q -Integral	204
6.4	Zwei andere Schlangeoperatoren	206
6.5	Die Gaußschen q -Binomialkoeffizienten und der q -Leibnizsche Lehrsatz .	208
6.5.1	Weitere Formeln	212
6.6	Das Ciglersche Operatorkalkül	213
6.7	Gould und Carlitzsche q -Binomialkoeffizient-Identitäten	216
6.8	q -Exponential- und q -trigonometrische Funktionen	219
6.9	Die Heinesche Funktion	224
6.10	Schwingungen in der q -Analysis	226
6.11	Die JHC q -Addition und q -Analoge der trigonometrischen Funktionen .	227
6.11.1	Weitere q -trigonometrische Funktionen	228
6.12	Die Wardsche q -Addition und einige Varianten der q -Ableitung	230
6.13	Weierstraßsche elliptische und sigma-Funktionen	233
6.13.1	Elliptische Funktionen	234
6.13.2	Verbindungen mit der Γ_q -Funktion	235
6.14	Der Chen-Liusche Operator oder die Parametervergrößerung	239

7	Eine umbrale Methode für q-hypergeometrische Reihen	241
7.1	Definition von q -hypergeometrische Reihen	241
7.1.1	q -Differenzengleichung für ${}_{p+1}\phi_p$	243
7.2	Saalschüttsche und balancierte q -hypergeometrische Reihen	243
7.3	Vorteile der Heineschen Definition	245
7.4	q -Binomischer Lehrsatz	246
7.5	Jacobische elliptischen Funktionen als $\Re$ und $\Im$ -Teile von q -hypergeometrischen Reihen mit Exponential-Funktionswert (Heine)	248
7.6	Die Jacobische Tripelprodukt-Identität	248
7.7	q -benachbarte Funktionen	249
7.8	Heinesche q -Transformationen	250
7.8.1	Die q -Beta-Funktion	252
7.9	Heines q -Analogon der Gaußschen Summationsformel	252
7.10	q -Analogon der Pfaff-Saalschüttschen Summationsformel	255
7.11	Searssche ${}_4\phi_3$ -Transformation	256
7.12	q -Analoga der Thomaeschen Transformationen	258
7.13	Die Bailey-Daumsche Summationsformel	259
7.14	Eine allgemeine Entwicklungsformel	259
7.14.1	Eine Summation für eine sehr balancierte ${}_4\phi_3$	262
7.15	Eine Summationsformel für eine endliche sehr balancierte ${}_6\phi_5$ -Reihe	264
7.15.1	Watsons Transformation für eine sehr balancierte ${}_8\phi_7$	264
7.16	Die Jacksonsche Summe einer Saalschüttschen ${}_8\phi_7$ -Reihe	266
7.16.1	Drei Korollaria	267
7.17	Watsons Beweis der Rogers-Ramanujanschen Identitäten	268
7.18	Die Baileysche Transformationsformel für eine sehr balancierte ${}_{10}\phi_9$	271
7.19	Watsons q -Analogon des Barneschen Kurvenintegrals	272
7.20	Drei q -Analoga der Eulerschen Integralformel für $\Gamma(x)$	273
7.21	Ungleichungen für die Γ_q -Funktion	274
7.22	Zusammenfassung der umbralen Methode	275
8	Miszellania	277
8.1	Vier q -Summationsformeln von Andrews	277
8.2	Einige quadratische q -hypergeometrische Transformationen	284
8.3	Die Kummersche ${}_2F_1(-1)$ Formel und die Jacobische Theta-Funktion	286
8.4	Noch ein Beweis der q -Dixonschen Formel	289
8.5	Eine endliche Version der q -Dixonschen Formel	289
8.6	Die Jacksonsche Summationsformel für eine 2-Saalschüttsche, balancierte ${}_5\phi_4$	290
8.7	Das Jacksonsche endliche q -Analogon der Dixonschen Formel	290
8.8	Weitere Beispiele von q -speziellen Funktionen	291
8.9	q -Analoga der Brown-Easthamschen Formeln	292
8.10	Das q -Analogon der Truesdellschen Funktion	294
8.11	Die Baileysche Transformation für q -Reihen	295
8.12	Eine q -Taylorsche Formel mit Restglied; Mittelwertsatz	296

8.13	Bilaterale Reihen	299
8.14	Fraktionales q -Integral	302
9	q-orthogonale Polynome	303
9.1	Ciglersche q -Laguerre-Polynome	303
9.1.1	Die verschiedenen Laguerre-Philosophien	303
9.1.2	Die q -Laguerre-Polynome	304
9.1.3	Erzeugende Funktionen und Rekurrenzen	305
9.1.4	Produkt-Entwicklungen	311
9.1.5	Bilineare erzeugende Funktionen	314
9.1.6	Al-Salamsche Operator-Ausdrücke	317
9.1.7	Der q -Laguerresche Rodriguez-Operator	324
9.1.8	q -Orthogonalität	327
9.2	q -Jacobi-Polynome	328
9.2.1	Definition und Rodriguez-Formel	328
9.2.2	Der q -Jacobische Rodriguez-Operator	330
9.2.3	Mehr erzeugende Funktionen und Rekurrenzen	337
9.2.4	q -Orthogonalität	341
9.3	q -Legendre-Polynome und Carlitz-AlSalam-Polynome	343
9.3.1	q -Legendre-Polynome	343
9.3.2	Carlitz-AlSalamsche Polynome	346
10	q-Funktionen von mehreren Veränderlichen	347
10.1	Die entsprechende Vektornotation	347
10.2	Historische Einführung	352
10.3	Transformationen für doppelte q -hypergeometrische Reihen	357
10.3.1	Doppelte q -Saalschützsche Reihen	360
10.3.2	Transformationsformel von Carlitz-Srivastava	362
10.3.3	Drei Formeln von Andrews	363
10.3.4	q -Analog der Carlsonschen Formeln	364
10.4	Die q -Appell-Funktion Φ_1 als q -Integral	367
10.5	q -Analog einiger Formeln von Srivastava	368
10.6	Einige q -Formeln von Srivastava	375
10.6.1	Erzeugende Funktionen	376
10.6.2	Transformationen	377
10.6.3	Doppelsummen-Identitäten (Srivastava und Jain)	378
10.7	Zwei Reduktionsformeln von Karlsson und Srivastava	381
10.8	q -Analog der Reduktionssätze von Karlsson	382
10.9	q -Analog der Burchnell-Chaundyschen Entwicklungen	384
10.9.1	q -Analog der Vermaschen Entwicklungsformeln	394
10.9.2	Eine ähnliche Formel	396
10.10	Multiple Erweiterungen der Euler-von Gröson-Gaußschen Formel	398
10.11	Eine Entwicklungsformel im Sinne von Chaundy	402
10.12	Formeln nach Burchnell-Chaundy und Jackson	403

11 Lineare partielle q-Differenzgleichungen	409
11.1 Einführung	409
11.2 Kanonische Gleichungen und Symmetrie-Technik für q -Reihen (Kalnins, Miller)	410
11.3 q -Differenzgleichungen für q -Appell- und q -Lauricella-Funktionen . . .	413
12 q-Analysis und Physik	421
12.1 Das q -Coulomb-Problem und das q -Wasserstoffatom	421
12.2 Verbindungen zur Knotentheorie	422
12.3 Allgemeine Relativitätstheorie	422
12.4 Molekulare und nukleare Spektroskopie	422
12.5 Elementarteilchenphysik und chemische Physik	423
12.6 Elektroschwache Wechselwirkung	424
12.7 Stringtheorie	424
12.8 Wess-Zumino-Modell	425
12.9 Quantenchromodynamik	426
13 Literaturverzeichnis	429
14 Indizierungssysteme	471
Index vor 1900	472
Index nach 1900	474
Physik-Index	476
Namensindex vor 1900	477
Namensindex nach 1900	480
Namensindex Physik	483
Notationsindex Kapitel 1,2,6–9	484
Notationsindex Kapitel 3	486
Notationsindex Kapitel 4,5	487
Notationsindex Kapitel 10-11	489
Notationsindex Kapitel 12	490