

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	9
1 Lehr-Lern-psychologische Einbettung.....	9
1.1 Um welche Inhaltsbereiche des Wissens von Lehrpersonen geht es?	9
1.2 Kognitiv-konstruktivistische Argumente für die Notwendigkeit der inhaltlich-mathematischen Intervention durch eine mathematisch kompetente Lehrperson	10
2 Ziel des Buchs.....	12
3 Aufbau und inhaltliches Konzept des Buchs	12
4 Literatur	13
 1 Strategiespiele	15
1.1 «Rot gegen Blau», «Zehn gewinnt».....	15
1.2 NIM-Spiel.....	20
1.3 «Rot gegen Blau»: Wer in der Hundertertafel als Erster oder Erste festsitzt, hat verloren.....	29
1.4 Klettern	31
1.5 Literatur	37
1.6 Übungen zum Thema «Strategiespiele»	38
 2 Zahlen zerlegen und zusammensetzen	41
2.1 Einfache Zahlzerlegungen	41
2.2 Zahlzerlegungen anspruchsvoller machen.....	41
2.2.1 Wie viele Zerlegungen einer Zahl in zwei (allgemein in n) Summanden gibt es?.....	41
2.2.2 Auf wie viele verschiedene Arten können Zahlen additiv zerlegt werden?.....	47
2.2.3 Zahlen in Summen aus aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen zerlegen	48
2.3 Literatur	56
2.4 Übungen zum Thema «Zahlen zerlegen».....	57
 3 Rechendreiecke	61
3.1 Rechendreiecke	61
3.2 Weiterentwicklung der Rechendreiecke.....	64
3.2.1 Rechenfünfecke und Rechenfünfsterne	64
3.2.2 Rechensiebenecke	65
3.2.3 Multiplikative Rechendreiecke.....	66
3.2.4 Multiplikative Rechenfünfsterne	66
3.3 Weiterführende Frage	67
3.3.1 Additive Rechenvierecke	67
3.3.2 Additive Rechensechsecke	68
3.4 Literatur	69
3.5 Übungen zum Thema «Rechenviielecke»	70
 4 Magische Quadrate, Zahlenquadrate	75
4.1 Einleitung	75
4.1.1 Normale und nichtnormale magische Quadrate.....	75
4.1.2 Die magische Zahl eines normalen magischen Quadrats der Ordnung n berechnen	78

4.1.3	Selbstkomplementäre und nicht-selbstkomplementäre normale magische Quadrate	79
4.2	Methoden zur Herstellung von magischen Quadraten ungerader Ordnung	85
4.2.1	Berechnung eines normalen magischen Quadrats der Ordnung 3 mithilfe eines Gleichungssystems	86
4.2.2	Herstellung eines normalen magischen Quadrats der Ordnung 3 mithilfe eines Zauberspruchs	87
4.2.3	Herstellung von normalen magischen Quadraten ungerader Ordnung mithilfe der Treppenmethode von Bachet	90
4.2.4	Herstellung von normalen magischen Quadraten ungerader Ordnung mithilfe der Zylindermethode von de la Loubère	98
4.3	Methoden zur Herstellung von magischen Quadraten gerader Ordnung	107
4.3.1	Die Diagonalenmethode zur Erzeugung des Melencolia-Quadrats von Albrecht Dürer	107
4.3.2	Die erweiterte Diagonalenmethode zur Erzeugung von normalen magischen Quadraten der Ordnung $4n$ ($n \in \mathbb{N}$)	119
4.4	Zwei spezielle normale magische Quadrate vierter Ordnung	125
4.4.1	Das Melencolia- und das Jaina-Quadrat	125
4.4.2	Mit dem Jaina-Rechenschema nichtnormale magische Quadrate vierter Ordnung erzeugen	130
4.5	Literatur	137
4.6	Übungen zum Thema «Magische Quadrate»	138
5	Figurierte Zahlen (Dreiecks-, Quadrat-, Rechteckzahlen)	141
5.1	Dreieckszahlen	141
5.1.1	Die Dreieckszahlen im Pascalschen Dreieck	143
5.1.2	Dreieckszahlen können durch fortgesetzte Subtraktion der aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen auf null abgebaut werden	144
5.2	Quadratzahlen	145
5.2.1	Die Differenz zwischen zwei benachbarten Quadratzahlen	145
5.2.2	Jede Quadratzahl kann durch fortlaufende Subtraktion der aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen $(-1, -3, -5 \text{ usw.})$ auf null abgebaut werden	146
5.3	Rechteckzahlen	146
5.3.1	Die Summe von aufeinanderfolgenden geraden Zahlen ist stets eine Rechteckzahl	147
5.3.2	Jede Rechteckzahl kann durch fortlaufende Subtraktion der aufeinanderfolgenden geraden Zahlen $(-2, -4, -6 \text{ usw.})$ auf null abgebaut werden	147
5.4	Zusammenhänge und Beziehungen zwischen Dreieckszahlen, Quadratzahlen und Rechteckzahlen	148
5.4.1	Zwei benachbarte Dreieckszahlen ergeben als Summe eine Quadratzahl	148
5.4.2	Jede Rechteckzahl ist das Doppelte einer Dreieckszahl	149
5.4.3	Es gibt Dreieckszahlen, die auch Quadratzahlen sind	150
5.5	Literatur	155
5.6	Übungen zum Thema «Figurierte Zahlen»	155
6	Mehrlinge (Polyominos, Polydominos, Polycubes)	161
6.1	Induktive Erzeugung von Mehrlingen (Polyominos, n-Ominos)	161
6.2	Polydominos	165
6.2.1	Induktive Erzeugung von Doppelquadrat-Drillingen (Tridominos)	166

6.3	Polyominos und Polydominos auf der Hundertertafel	169
6.3.1	Summen der auf der Hundertertafel abgedeckten Zahlen vor und nach der Parallelverschiebung des Mehrlings im Vergleich	169
6.3.2	Summen der auf der Hundertertafel abgedeckten Zahlen vor und nach der Parallelverschiebung des Mehrlings modulo betrachtet	171
6.4	Welche Flächen kann man mit welchen n-Ominos bzw. n-Dominos lückenlos und überlappungsfrei parkettieren?	176
6.5	Polycubes (3D-Polyominos)	179
6.5.1	Der Soma-Würfel	180
6.6	Literatur	182
6.7	Übungen zum Thema «Mehrlinge»	183
7	Mit Divisionsresten rechnen (modulo)	187
7.1	Einleitung	187
7.2	Neunerreste	187
7.2.1	Weshalb ist es nicht möglich, die Ziffernkarten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 so zu drei dreistelligen Zahlen anzugeordnen, dass deren Summe 1000 ergibt?	188
7.2.2	Die Summe 999 aus drei dreistelligen Zahlen, die aus den Ziffernkarten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 gebildet sind, kann auf 1080 verschiedene Arten entstehen	195
7.3	Die Summe ist immer durch 9 teilbar	198
7.4	Zahlenzauberei «Geteilt durch 7»	200
7.5	Literatur	201
7.6	Übungen zum Thema «Rechnen mit Divisionsresten» (modulo)	202
8	Zeichnen ohne Absetzen, Durchlaufen von Netzen	205
8.1	Das «Haus von Nikolaus»	205
8.2	Das «Königsberger Brückenproblem»	208
8.3	Anwendungen	212
8.4	Weiterführung des Themas	215
8.4.1	Das «Briefträgerproblem» (chinese postman problem)	215
8.4.2	Eine Buslinie planen	217
8.5	Hölzchen maximal	218
8.6	Literatur	222
8.7	Übungen zum Thema «Zeichnen ohne Absetzen, Durchlaufen von Netzen in einem Zug»	223
9	Besondere Zahlen	229
9.1	TILL-Zahlen	229
9.2	ANNA-Zahlen	232
9.3	Kaprekar-Konstanten	237
9.3.1	Dreistellige Minus-Türme	238
9.3.2	Vierstellige Minus-Türme	246
9.3.3	Kaprekar-Konstanten und Minus-Türme von 5- bis 2000-stelligen Zahlen	254
9.4	Literatur	254
9.5	Übungen zum Thema «Besondere Zahlen»	255
9.5.1	Übungen zum Thema «TILL-, ANNA- und Spiegelzahlen»	255
9.5.2	Übungen zum Thema «Kaprekar-Konstanten» (Minus-Türme, «Alle Wege führen nach Sörenberg»)	255

10 Parkettieren.....	261
10.1 Einfache Parkettierungsaufgaben	261
10.2 Mathematische Grundlagen des Parkettierens	262
10.2.1 Reguläre n-Ecke.....	262
10.2.2 Mit kongruenten irregulären konvexen n-Ecken parkettieren	265
10.3 Aus parkettierbaren Grundpolygonen krummlinig oder zackenförmig begrenzte Formen herstellen, mit denen man parkettieren kann	275
10.3.1 Grundlagen der «Knabbertechnik».....	275
10.3.2 Methoden der «Knabbertechnik»	278
10.4 Literatur	307