

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>XIII</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>XV</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1. Ausgangslage und Motivation . . . . .	2
1.2. Forschungsfragen . . . . .	5
1.3. Überlegungen zur Durchführung . . . . .	8
1.4. Aufbau der Arbeit . . . . .	8
<b>I. Theoretische Grundlagen und Stand der Forschung</b>	<b>11</b>
<b>2. Visualisierung in Mathematik und Mathematikdidaktik</b>	<b>13</b>
2.1. Verwendung des Begriffs „Visualisierung“ . . . . .	15
2.1.1. Prozess und Produkt . . . . .	15
2.1.2. Etymologische Wurzeln . . . . .	16
2.1.3. Perspektiven verschiedener Disziplinen . . . . .	16
2.2. Überblick anhand eines prozessbasierten Modells . . . . .	19
2.2.1. Auswahl eines Vorgehens . . . . .	20
2.2.2. Visualisierung als Erstellen und Interpretieren . . . . .	21
2.2.3. Erstellen und Interpretieren in weiteren Definitionen .	25
2.2.4. Visualisierung als Darstellen . . . . .	29
2.2.5. Visualisierung als Vorstellen und Transformieren . . .	31
2.2.6. Gesamtes Modell . . . . .	33
2.2.7. Einordnen weiterer Visualisierungsdefinitionen . . . .	34
2.2.8. Zusammenfassung . . . . .	40

---

2.3. Begriffsklärung für diese Arbeit . . . . .	44
2.4. Exkurs: Abgrenzung zu Repräsentation und Modellerweiterungen . . . . .	45
2.4.1. Repräsentation und Visualisierung . . . . .	45
2.4.2. Erweiterungspotenzial des Modells . . . . .	47
<b>3. Suchraum der Lehrkräfte</b>	<b>49</b>
3.1. Curriculare Vorgaben . . . . .	50
3.1.1. Bildungsstandards . . . . .	50
3.1.2. NCTM-Standards . . . . .	53
3.2. Mathematikdidaktische Theorien . . . . .	55
3.2.1. Repräsentationswechsel und Darstellungsarten . . . . .	56
3.2.2. Fachbezogene mathematikdidaktische Aspekte . . . . .	59
3.3. Ziele des Visualisierungseinsatzes . . . . .	61
3.3.1. Literatur . . . . .	62
3.3.2. Einzelne Ziele . . . . .	63
3.4. Bildliche Darstellungen in Schulbüchern . . . . .	69
3.4.1. Kategorisierungsansätze . . . . .	70
3.4.2. Forschungsdesiderat . . . . .	71
3.5. Zusammenfassung . . . . .	72
<b>4. Studien zu den Beliefs von Lehrkräften zum Thema Visualisierung</b>	<b>73</b>
4.1. Auswahl der Studien . . . . .	74
4.2. Unterrichten oder mathematisch arbeiten . . . . .	76
4.3. Prozessbezogen untersuchte Beliefs zum Visualisierungseinsatz	78
4.3.1. Problemlösen . . . . .	78
4.3.2. Beweisen . . . . .	83
4.3.3. Technikeinsatz . . . . .	86
4.3.4. Zusammenfassung . . . . .	88
4.4. Inhaltsbezogen untersuchte Beliefs zum Visualisierungseinsatz	89
4.4.1. Bruchrechnung . . . . .	89
4.4.2. Algebra . . . . .	92
4.4.3. Funktionen . . . . .	94
4.4.4. Analysis . . . . .	96
4.4.5. Zusammenfassung . . . . .	97
4.5. Übergreifend untersuchte Beliefs zum Visualisierungseinsatz .	98
4.6. Fazit . . . . .	102

<b>5. Beliefs</b>	<b>107</b>
5.1. Positionierung . . . . .	107
5.1.1. Mathematics-related affect . . . . .	108
5.1.2. Beliefs . . . . .	111
5.2. Begriffsklärung . . . . .	111
5.2.1. Fehlender Konsens bezüglich des Beliefbegriffs . . . . .	112
5.2.2. Beliefs versus Wissen . . . . .	113
5.2.3. Beliefs als subjektive Wahrheiten . . . . .	117
5.2.4. Beliefs und Motivation . . . . .	118
5.2.5. Beliefs und Emotionen . . . . .	120
5.2.6. Zusammenfassung . . . . .	120
5.3. Strukturen . . . . .	122
5.3.1. Beliefsysteme . . . . .	122
5.3.2. Stärke von Beliefs . . . . .	128
5.3.3. Kategorisierung von Beliefs . . . . .	132
5.4. Entwicklung von Beliefs . . . . .	136
5.4.1. Entstehung und Veränderung . . . . .	136
5.4.2. Widersprüchlichkeit . . . . .	137
5.4.3. Fazit . . . . .	138
5.5. Erhebung von Beliefs . . . . .	139
5.5.1. Bewusstheit . . . . .	139
5.5.2. Erhebungsmethoden . . . . .	140
5.5.3. Erhebung in dieser Arbeit . . . . .	142
5.6. Theoretische Annahmen und Forschungsfragen . . . . .	142
5.6.1. Theoretische Annahmen . . . . .	143
5.6.2. Forschungsfragen . . . . .	144
<b>II. Methodologie und methodisches Vorgehen</b>	<b>147</b>
<b>6. Methodologische Einordnung</b>	<b>149</b>
<b>7. Datenerhebung</b>	<b>153</b>
7.1. Entwicklung der Erhebung . . . . .	153
7.1.1. Das problemzentrierte Interview . . . . .	153
7.1.2. Entwicklung des Interviewleitfadens . . . . .	155
7.1.3. Entwicklung der weiteren Erhebungsinstrumente . . . . .	162
7.2. Sampling und Stichprobe . . . . .	163
7.2.1. Theoretisches Sampling . . . . .	163

7.2.2. Stichprobe für diese Arbeit . . . . .	164
7.2.3. Repräsentativität . . . . .	166
7.3. Anonymisierung . . . . .	167
7.4. Durchführung und Reflexion der Erhebung . . . . .	167
<b>8. Auswertung und Theoriebildung</b>	<b>171</b>
8.1. Transkription . . . . .	171
8.1.1. Einführung . . . . .	172
8.1.2. Entscheidungen . . . . .	173
8.1.3. Zeichnungen und Gesten . . . . .	174
8.1.4. Durchführung . . . . .	175
8.1.5. Zusammenfassung . . . . .	176
8.2. Kodierung und Theoriebildung . . . . .	176
<b>III. Ergebnisse: Analyse und Theorieentwicklung</b>	<b>179</b>
<b>9. Fallbeschreibung von Herrn A</b>	<b>181</b>
9.1. Bruchrechnung . . . . .	182
9.1.1. Ziele des Visualisierungseinsatzes . . . . .	182
9.1.2. Zusammenhänge zwischen den Zielen . . . . .	194
9.1.3. Überzeugungen zu nützlichen Darstellungen . . . . .	197
9.1.4. Überzeugungen zum Unterrichtsprozess . . . . .	203
9.1.5. Überzeugungen zum Lernen . . . . .	207
9.1.6. Überzeugungen zu Schülerinnen und Schülern . . . . .	209
9.1.7. Überzeugungen zu Grenzen des Visualisierens . . . . .	211
9.1.8. Zusammenfassung . . . . .	213
9.2. Algebra . . . . .	217
9.2.1. Ziele des Visualisierungseinsatzes . . . . .	217
9.2.2. Überzeugungen zu nützlichen Darstellungen . . . . .	227
9.2.3. Überzeugungen zum Unterrichtsprozess . . . . .	230
9.2.4. Überzeugungen zum Lernen . . . . .	232
9.2.5. Überzeugungen zu Schülerinnen und Schülern . . . . .	233
9.2.6. Überzeugungen zu Grenzen des Visualisierens . . . . .	233
9.2.7. Zusammenfassung und Vergleich zur Bruchrechnung . . . . .	234
9.3. Funktionen . . . . .	236
9.3.1. Ziele des Visualisierungseinsatzes . . . . .	236
9.3.2. Überzeugungen zu nützlichen Darstellungen . . . . .	246
9.3.3. Überzeugungen zum Unterrichtsprozess . . . . .	247

9.3.4. Überzeugungen zum Lernen . . . . .	249
9.3.5. Überzeugungen zu Schülerinnen und Schülern . . . . .	252
9.3.6. Überzeugungen zu Grenzen des Visualisierens . . . . .	252
9.3.7. Zusammenfassung und Vergleich zu Bruchrechnung und Algebra . . . . .	253
9.4. Überzeugungen zur eigenen Person . . . . .	255
9.5. Zwischenergebnis und Hypothesen . . . . .	257
9.5.1. Diskussion einzelner Aspekte . . . . .	257
9.5.2. Hypothesen . . . . .	258
9.5.3. Anmerkung zur weiteren Vorgehensweise . . . . .	261
<b>10. Kontrastierung mit Frau B</b>	<b>263</b>
10.1. Bruchrechnung . . . . .	264
10.1.1. Ziele des Visualisierungseinsatzes . . . . .	264
10.1.2. Überzeugungen zum Visualisieren . . . . .	270
10.1.3. Zusammenfassung und Vergleich mit Herrn A . . . . .	278
10.2. Algebra . . . . .	279
10.2.1. Ziele des Visualisierungseinsatzes . . . . .	279
10.2.2. Überzeugungen zum Visualisieren . . . . .	281
10.2.3. Zusammenfassung und Vergleiche . . . . .	283
10.3. Funktionen . . . . .	286
10.3.1. Ziele des Visualisierungseinsatzes . . . . .	286
10.3.2. Überzeugungen zum Visualisieren . . . . .	290
10.3.3. Zusammenfassung und Vergleiche . . . . .	292
10.4. Analysis . . . . .	295
10.4.1. Ziele des Visualisierungseinsatzes . . . . .	295
10.4.2. Überzeugungen zum Visualisieren . . . . .	297
10.4.3. Zusammenfassung und Vergleiche aller Themen . . . . .	298
10.5. Überzeugungen zur eigenen Person . . . . .	300
10.6. Zwischenergebnis und Hypothesen . . . . .	302
10.6.1. Zusammenfassung und Hypothesen . . . . .	302
10.6.2. Diskussion einzelner Aspekte . . . . .	303
10.6.3. Anmerkung zur weiteren Vorgehensweise . . . . .	304
<b>11. Beliefs der weiteren Lehrkräfte</b>	<b>305</b>
11.1. Frau C . . . . .	305
11.1.1. Ziele des Visualisierungseinsatzes . . . . .	306
11.1.2. Überzeugungen zum Visualisieren . . . . .	311

11.2. Frau D . . . . .	323
11.2.1. Ziele des Visualisierungseinsatzes . . . . .	323
11.2.2. Überzeugungen zum Visualisieren . . . . .	327
11.3. Herr E . . . . .	337
11.3.1. Ziele des Visualisierungseinsatzes . . . . .	337
11.3.2. Überzeugungen zum Visualisieren . . . . .	339
11.4. Hypothesen und weiteres Vorgehen . . . . .	348
<b>12. Zusammenfassung und Vergleiche zwischen den Lehrkräften</b>	<b>351</b>
12.1. Ziele des Visualisierungseinsatzes . . . . .	352
12.1.1. Empirisch rekonstruierte Ziele des Visualisierungsein- satzes . . . . .	352
12.1.2. Vergleich aller Ziele über alle Personen hinweg . . . . .	356
12.1.3. Ziele aller Personen in Kurzsätzen . . . . .	357
12.1.4. Typisierung anhand der Ziele . . . . .	359
12.2. Überzeugungen zum Visualisieren . . . . .	365
12.2.1. Lernen: Repräsentationswechsel . . . . .	366
12.2.2. Lernen: Mit Hilfe von bildlichen Darstellungen . . . . .	368
12.2.3. Eigenständige Nutzung durch Schülerinnen und Schüler . . . . .	369
12.2.4. Unterrichtsprozess: Unterrichten von Anforderungen . . . . .	370
12.2.5. Unterrichtsprozess: Einsatz von Technik . . . . .	371
12.2.6. Schülerinnen und Schüler: Lerntypen . . . . .	372
12.2.7. Grenzen beim Arbeiten mit bildlichen Darstellungen . . . . .	373
12.2.8. Eigenes mathematisches Arbeiten . . . . .	374
12.2.9. Visualisierungsbegriff . . . . .	375
12.3. Vergleich zum Einsatz der Gleichungswaage . . . . .	376
<b>IV. Diskussion und Ausblick</b>	<b>379</b>
<b>13. Zusammenfassung und Diskussion</b>	<b>381</b>
13.1. Einordnung zentraler Ergebnisse dieser Arbeit . . . . .	382
13.1.1. Vielfältige Überzeugungen . . . . .	382
13.1.2. Gleiche Ziele, verschiedene Teilziele . . . . .	384
13.1.3. Objekte, auf die sich die Überzeugungen richten . . . . .	385
13.1.4. Themenübergreifende Parallelen . . . . .	388
13.1.5. Stärke der Ziele und Überzeugungen . . . . .	389
13.1.6. Muster zwischen Zielen und Überzeugungen . . . . .	390

13.2. Einordnung der Ergebnisse zu einzelnen Überzeugungen . . . . .	391
13.2.1. Nützliche bildliche Darstellungen . . . . .	392
13.2.2. Günstiger Unterrichtsprozess . . . . .	392
13.2.3. Lernen mit bildlichen Darstellungen . . . . .	394
13.2.4. Schülerinnen und Schüler . . . . .	394
13.2.5. Grenzen des Visualisierungseinsatzes . . . . .	395
13.2.6. Eigenes mathematisches Arbeiten . . . . .	396
13.2.7. Unbesetzte Objekte . . . . .	397
13.3. Einordnung der Ergebnisse zu einzelnen Zielen und Teilzielen	397
13.3.1. Ziel 1 (Konzept verstehen) . . . . .	398
13.3.2. Ziel 2 (Vorgehensweise verstehen) . . . . .	398
13.3.3. Ziel 3 (Lesen und Erstellen) . . . . .	399
13.3.4. Ziel 4 (Sich an etwas Erinnern) . . . . .	399
13.3.5. Ziel 5 (Motivieren) . . . . .	400
13.4. Visualisierungsbegriff . . . . .	400
13.5. Theoretische und empirische Kategorisierung der Ziele . . . . .	401
13.6. Vergleiche zwischen Lehrkräften . . . . .	403
13.6.1. Typenbildung . . . . .	403
13.6.2. Zusammenhänge . . . . .	404
<b>14. Methodische Reflexion</b>	<b>407</b>
14.1. Theoretische Sättigung der Ziele und Überzeugungen . . . . .	407
14.2. Sampling . . . . .	409
14.3. Durchführung von Erhebung und Auswertung . . . . .	411
14.3.1. Gestaltung der Interviews . . . . .	412
14.3.2. Transkription . . . . .	416
14.3.3. Kodierung . . . . .	417
<b>15. Ausblick</b>	<b>419</b>
15.1. Forschungsdesiderate mit eher praktischem Bezug . . . . .	419
15.2. Weitere Grundlagenforschung . . . . .	422
15.3. Aus der Praxis lernen . . . . .	423
15.4. Aus- und Weiterbildungen zum Visualisierungseinsatz . . . . .	423

---

<b>Anhang</b>	<b>449</b>
<b>A. Bildungsstandards</b>	<b>451</b>
A.1. Bildliche Darstellungen in den Aufgaben zu K4 . . . . .	452
A.2. Bildliche Darstellungen in den Aufgaben zu K5 . . . . .	453
<b>B. Erhebung</b>	<b>455</b>
B.1. Interviewleitfaden . . . . .	456
B.2. Daten zum theoretischen Sampling . . . . .	470
<b>C. Transkriptionssystem</b>	<b>473</b>
C.1. Zeichen und Abkürzungen . . . . .	474
C.2. Transkriptionsregeln und Hinweise zur Schreibweise . . . . .	475