

# Inhaltsverzeichnis

<b>I Einführung</b>	<b>7</b>
1 Beispiele für Anwendungen der Linearen Algebra	9
<b>2 Metamathematik</b>	<b>13</b>
2.1 Symbole, Aussagen und Aussageformen . . . . .	13
2.1.1 Mathematische Symbole . . . . .	13
2.1.2 Aussagen und Aussageformen . . . . .	14
2.1.3 Prinzipien der Mathematischen Logik . . . . .	15
2.2 Struktur mathematischer Texte . . . . .	16
2.2.1 Axiome und Definitionen . . . . .	16
2.2.2 Sätze und Theoreme . . . . .	17
2.2.3 Beispiele . . . . .	17
2.3 Beweise . . . . .	17
2.3.1 Beweis durch vollständige Induktion . . . . .	18
2.3.2 Direkte Beweise . . . . .	18
2.3.3 Beweise durch Kontraposition . . . . .	19
2.3.4 Widerspruchsbeweise . . . . .	19
2.3.5 Ringschlüsse . . . . .	19
<b>3 Elementare Mengenlehre</b>	<b>21</b>
3.1 Mengen . . . . .	21
3.2 Relationen . . . . .	23
3.3 Abbildungen . . . . .	25
<b>II Grundelemente der Linearen Algebra</b>	<b>29</b>
<b>4 Algebraische Strukturen</b>	<b>31</b>
4.1 Körper und Ringe . . . . .	31
4.1.1 Algebraische Struktur der reellen Zahlen . . . . .	31
4.1.2 Körper und Ringe . . . . .	33
4.2 Beispiele für Körper und Ringe . . . . .	35
4.2.1 Der binäre Körper und endliche Körper . . . . .	35
4.2.2 Der Körper der komplexen Zahlen . . . . .	39
4.2.3 Der Ring der Matrizen . . . . .	40
4.3 Homomorphismen zwischen Körpern . . . . .	43
<b>5 Theorie der Vektorräume</b>	<b>45</b>
5.1 Reelle und komplexe Vektorräume . . . . .	45
5.2 Unterräume und deren Erzeugung . . . . .	47
5.3 Basis und Dimension . . . . .	49
5.4 Lineare Abbildungen . . . . .	54
5.5 Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	64

<b>III Anwendungen der Vektorraumtheorie</b>	<b>67</b>
<b>6 Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>69</b>
6.1 Die Struktur der Lösungsmenge . . . . .	69
6.2 Die Lösungsmenge bei einfachen Systemen . . . . .	71
6.2.1 (1,1)-Systeme . . . . .	71
6.2.2 (1,2)-Systeme . . . . .	71
6.2.3 (1,n)-Systeme . . . . .	72
6.2.4 (m,1)-Systeme . . . . .	72
6.3 Elementare Zeilenumformungen . . . . .	73
6.4 Treppen-Normalform und Gaußalgorithmus . . . . .	75
6.5 Lösungsmenge bei allgemeinen Problemen . . . . .	79
6.6 Invertierbare Matrizen . . . . .	82
<b>7 Determinanten</b>	<b>87</b>
7.1 Flächeninhalt eines Parallelogramms . . . . .	87
7.2 Eindeutigkeit von Determinanten . . . . .	89
7.3 Existenz von Determinanten: Laplacescher Entwicklungssatz . . . . .	91
7.4 Determinantenmultiplikationssatz . . . . .	94
7.5 Determinante der Vandermonde-Matrix . . . . .	95
<b>8 Polynome</b>	<b>97</b>
8.1 Der $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Polynome . . . . .	97
8.2 Polynominterpolation . . . . .	98
8.3 Interpolation mit kubischen Splines . . . . .	100
8.4 Das charakteristische Polynom . . . . .	103
<b>IV Erweiterungen von Vektorräumen</b>	<b>105</b>
<b>9 Euklidische Vektorräume</b>	<b>107</b>
9.1 Das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^n$ . . . . .	107
9.2 Schmidtsche Orthonormalisierung . . . . .	111
9.3 Orthogonale Abbildungen . . . . .	115
9.4 Selbstdadjungierter Endomorphismus . . . . .	118
<b>10 Linearformen</b>	<b>123</b>
10.1 Bilinearformen und hermitesche Formen . . . . .	123
10.2 Affine und isometrische Abbildungen . . . . .	125
10.3 Quadriken . . . . .	126