

Inhaltsverzeichnis

Übersicht verwendeter Symbole	XXIX
Dimensionen wichtiger physikalischer Größen	XXXI
1 Einleitung und Zielstellung	1
2 Prinzipien und Formalismen der Physik	9
2.1 Differentialprinzipien der Mechanik	10
2.1.1 Das d' Alembert-Prinzip	11
2.1.2 Das Prinzip der virtuellen Arbeit	12
2.1.3 Gaußsches Prinzip des kleinsten Zwanges	15
2.2 Das Hamilton-Prinzip der extremalen Wirkung	15
2.3 Lagrange-Hamilton-Formalismus für klassische Felder	19
2.3.1 Das Hamilton-Prinzip als relativistisch invariantes Prinzip	19
2.3.2 Die Euler-Lagrange-Gleichungen des Feldsystems	21
2.3.3 Die Hamilton-Gleichungen	22
3 Elektromagnetische Felder	27
3.1 Feldgleichungen, Invarianz und Feldbegriff	28
3.1.1 Die Maxwellschen Gleichungen in vier- und in dreidimensionaler Form	28
3.1.2 Formen der Maxwellschen Gleichungen in verschiedenen Maßsystemen	31
3.1.3 Die Feldgleichungen und ihre Anzahl	32
3.1.4 Forminvarianz der Maxwellschen Gleichungen	33
3.1.4.1 Was heißt Forminvarianz	33
3.1.4.2 Invarianz und Tensorkalkül	34
3.1.4.3 Forminvariante Schreibweise der Maxwellschen Gleichungen	37
3.1.5 Definition des Feldbegriffs	38
3.1.6 Entdeckung der Ablenkung einer Magnetnadel durch Romagnosi	41
3.1.7 Konvektive und konduktive Ladungs- und Stromdichten	42

3.2	Energieumwandlungen, Energieströmung und Leistungsbilanz im elektromagnetischen Feld	43
3.3	Eindeutige Lösbarkeit der Maxwellschen Gleichungen	45
3.4	Arten von Randbedingungen	47
3.4.1	Hyperbolische Differentialgleichung und ihre Anfangsbedingungen	48
3.4.2	Elliptische Differentialgleichungen und ihre Randbedingungen	48
3.4.3	Parabolische Differentialgleichungen	49
3.4.4	Homogene und inhomogene Randbedingungen	50
3.4.5	Forderungen an die einzelnen Randwertaufgaben	50
3.5	Beispiel zur Transformation bei Basiswechsel	50
3.5.1	Beispiel einer Transformation bei Basiswechsel in schiefwinkligen Koordinaten	51
3.5.1.1	Die schiefwinklige Basis	51
3.5.1.2	Die metrischen Koeffizienten	52
3.5.1.3	Betrag eines Vektors als Invariante	53
3.5.1.4	Transformation bei Basiswechsel	54
3.5.1.5	Koordinaten und Betrag des transformierten Vektors	57
3.5.2	Transformationsbeziehungen zwischen krummlinigen Koordinatensystemen	60
3.5.2.1	Kartesische und Kugelkoordinaten	61
3.5.2.2	Übergang von den Kugel- zu den Zylinderkoordinaten und umgekehrt	63
3.6	Einteilung der elektromagnetischen Felder	67
3.6.1	Einteilung nach den Materialeigenschaften	67
3.6.2	Gliederung nach dem Zeitverhalten	68
3.6.2.1	Elektrostatische und magnetostatische Felder	68
3.6.2.2	Stationäre Felder	69
3.6.2.3	Das quasistationäre Feld	69
3.6.2.4	Rasch veränderliche Felder	70
3.7	Verhalten der Feldgrößen an Grenzflächen	70
3.8	Kraftwirkungen im elektromagnetischen Feld	75
3.8.1	Energieimpulstensor, Maxwellscher Spannungstensor und seine Transformation bei Basiswechsel	75
3.8.2	Berechnung der Krafteinwirkung unter Berücksichtigung der Materialeigenschaften	78

4	Berechnung elektromagnetischer Felder	81
4.1	Elektrostatische Felder	82
4.1.1	Die Gleichungen von Laplace und Poisson	83
4.1.2	Direkte Integration der Gleichungen von Laplace und Poisson	84
4.1.2.1	Berechnung eindimensionaler Felder	84
4.1.2.2	Lösung der Laplace-Gleichung für dreidimensionale Felder	89
4.1.2.3	Lösung der Laplace-Gleichung bei bekanntem Potentialverlauf längs der Symmetrieachse durch Reihenentwicklung	106
4.1.2.4	Lösung der Laplace-Gleichung bei bekanntem Potentialverlauf in einer Symmetrieebene durch Reihenansatz	110
4.1.2.5	Der Greensche Satz	112
4.1.2.6	Lösung der Gleichungen von Poisson	113
4.1.3	Behandlung von elektrostatischen Feldern mit konformen Abbildungen	118
4.1.3.1	Analytische Funktionen und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen	118
4.1.3.2	Abbildungen durch Funktionen einer komplexen Veränderlichen	121
4.1.3.3	Anwendung der konformen Abbildungen	124
4.1.4	Der Satz von Schwarz-Christoffel	129
4.1.4.1	Herleitung des Satzes	130
4.1.4.2	Berechnung von konformen Abbildungsfunktionen für elektrostatische Anordnungen	137
4.1.5	Die Abbildungsfunktion für das Smith-Diagramm	144
4.1.6	Berechnung elektrischer Felder durch Spiegelung	146
4.1.6.1	Beschreibung der Methode	146
4.1.6.2	Anwendung der Methode	149
4.1.7	Die Monte-Carlo-Methode	151
4.1.8	Graphische Ermittlung des Feldbildes bei gegebener Elektrodenform	155
4.1.9	Übersicht zu den Ergebnissen	155
4.2	Berechnung stationärer Felder	157
4.2.1	Das stationäre elektrische Strömungsfeld	157
4.2.1.1	Berechnungsmethoden und Anwendung des Superpositionsprinzips	159
4.2.1.2	Methode der Spiegelung	159
4.2.1.3	Anwendungen	159
4.2.2	Das stationäre magnetische Feld	162
4.2.2.1	Nichtexistenz wahrer magnetischer Ladungen	162

4.2.2.2	Berechnungen des magnetischen Feldes über das Vektorpotential	162
4.2.2.3	Herleitung des Gesetzes von Biot-Savart	165
4.2.2.4	Berechnung des magnetischen Flusses aus dem Vektorpotential	171
4.2.2.5	Anwendung konformer Abbildungen zur Berechnung von Strömungsfeldern	171
4.2.2.6	Elektrotechnische Anwendungen	172
4.3	Quasistationäre und raschveränderliche Felder	177
4.3.1	Die Verschiebungsstromdichte	177
4.3.2	Die Kontinuitätsgleichung im vierdimensionalen Raum und ihre Forminvarianz	181
4.3.3	Die Feldgleichungen der magnetischen Feldstärke bei quasistationären Vorgängen	183
4.3.4	Berechnung quasistationärer Felder	184
4.3.5	Raschveränderliche Felder	187
4.3.5.1	Der Wellenoperator und seine Invarianz gegenüber der Lorentz-Transformation	189
4.3.5.2	Herleitung der Wellengleichung für die Feldstärke	191
4.3.5.3	Wellengleichung für das elektrische skalare Potential und das magnetische Vektorpotential	192
4.3.5.4	Lösung der Wellengleichung im R^3 - retardierte Potentiale	194
5	Berechnung von Feldern mit numerischen Methoden	201
5.1	Übersicht zu den Methoden	202
5.2	Die Finite Differenzen Methode - FDM	205
5.2.1	Diskretisierung	206
5.2.2	Entwicklung der Potentialgleichung im Differenzenstern	206
5.2.2.1	Der 5-Punkte-Differenzenstern	206
5.2.2.2	Anwendung des 9-Punkte-Differenzensterns	208
5.2.3	Die Randbedingungen	208
5.2.4	Diskretisierungs- und Nummerierungsmöglichkeiten	212
5.2.5	Lösung des Gleichungssystems	213
5.2.6	Finite-Differenzen-Methode "per Hand"	214
5.2.7	Aufbau eines Rechenprogramms	219
5.3	Die Finite Elemente Methode - FEM	219
5.3.1	Grundlagen	219
5.3.1.1	Variationsansatz im ein- und im dreidimensionalen Fall	220

5.3.1.2	Das Verfahren von Ritz	225
5.3.2	Ansatzfunktion und Diskretisierung	226
5.3.2.1	Strategie und Vorgehen in drei Schritten	226
5.3.2.2	Die Diskretisierung des Feldgebietes	227
5.4	Die Randelementemethode - BEM	231
5.4.1	Die Methode	232
5.4.2	Boundary elemente method - Strategie	232
5.4.2.1	Diskretisierung	236
5.4.2.2	Die Berechnung des elektrischen Potentials φ und der Feldstärke \vec{E}	237
5.5	Anwendung der numerischen Feldberechnung	238
5.5.1	Die Berechnung statischer Feldprobleme mit MAXWELL am Bei- spiel eine Ventilmagneten	238
5.5.1.1	Auswahl des Feldtyps	240
5.5.1.2	Das Koordinatensystem	240
5.5.1.3	Eingabe der Geometrie	241
5.5.1.4	Materialeingabe - <i>Setup Materials...</i>	243
5.5.1.5	Quellen und Randbedingungen	245
5.5.1.6	Die Parameter zur Berechnung	246
5.5.1.7	MAXWELL und die Rechnungsschleifen	247
5.5.1.8	Die Berechnung der Anordnung	248
5.5.1.9	Ergebnisdarstellung und Postprozessor	249
5.5.2	Berechnung transienter Felder mit PROFI	250
5.5.2.1	Eingabe der Daten	251
5.5.2.2	Parameter des Gleichungslösers	255
5.5.2.3	Die Rechenergebnisse	257
5.5.2.4	Ergebnisse und ihre Bewertung	258
6	Synthese von elektrischen und magnetischen Feldern	265
6.1	Die Synthesaufgabe für Felder	266
6.2	Die Syntheseetappen und die Methode der Feldsynthese	267
6.3	Die Synthese von Potential- und Feldstärkefunktion im dreidimensionalen euklidischen Raum	269
6.3.1	Synthese eines hyperbolischen Potentialverlaufs	269
6.3.1.1	Die mathematische Synthese	269
6.3.1.2	Feldsynthese	272
6.3.1.3	Äquivalenzbetrachtungen	273
6.3.1.4	Realisierung der Feldverlaufsfunction	274

6.3.2	Synthese eines zylindersymmetrischen Feldes	275
6.3.2.1	Die mathematische Synthese	275
6.3.2.2	Synthese des Feldverlaufs im Zylinder	278
6.3.2.3	Die Realisierung der Ergebnisse	278
6.3.3	Elliptischer Potentialverlauf und seine Synthese	282
6.3.3.1	Die mathematische Sythese	282
6.3.3.2	Synthese des elektrischen Feldes	285
6.3.3.3	Zu Äquivalenzen	286
6.3.3.4	Realisierung des Feldverlaufs	286
6.4	Synthese von Feldern im vierdimensionalen Raum	289
6.4.1	Minkowski-Raum und seine Metrik	290
6.4.1.1	Basis und Dimension der Koordinaten des Feldtensors	290
6.4.1.2	Metrik und Abstand im \mathcal{R}^4	292
6.4.1.3	Die Christoffel-Symbole	294
6.4.1.4	Kovariante Ableitungen von Tensoren	295
6.4.1.5	Linien-, Flächen- und Volumenelemente und die Integralsätze von Gauß und Stokes	297
6.4.2	Mathematische Beziehungen des elektromagnetischen Feldes im <i>Minkowski</i> -Raum	301
6.4.2.1	Quantitätsgrößen und Erregungstensor	301
6.4.2.2	Zusammenhänge zwischen den Feldgrößen und der Metrik	304
6.4.3	Synthese von Feldern in Abhängigkeit von einer Koordinate	308
6.4.3.1	Der Tensor des Feldes und seine Metrik	308
6.4.3.2	Synthese eines fallenden Potentialverlaufs	309
6.4.3.3	Synthese eines elliptischen Potentialverlaufs	312
6.4.3.4	Synthese eines zylindersymmetrischen Feldes	314
6.4.4	Abhängigkeit der Feldgrößen von zwei Koordinaten	316
6.4.4.1	Feldtensor und Metrik	316
6.4.4.2	Synthese des Potentialverlaufs	317
6.4.5	Synthese von Feldern in Abhängigkeit von drei Koordinaten	319
6.4.6	Synthese von magnetischen Feldern	321
6.4.6.1	Zusammenhänge zwischen den Feldgrößen und der Metrik	321
6.4.6.2	Synthese magnetischer Felder in Abhängigkeit von einer Koordinate	324

A	329
A.1 Koordinatensysteme und deren metrische Koeffizienten	329
A.1.1 Kreiszylinderkoordinatensystem	329
A.1.2 Hyperbolisches Zylinderkoordinatensystem	331
A.1.3 Koordinatensystem sich berührender Zylinder	332
A.1.4 Kugelkoordinatensystem	333
A.1.5 Gestrecktes Elliptisches Koordinatensystem	334
A.1.6 Abgeplattetes Elliptisches Koordinatensystem	335
A.2 Rechenoperationen im \mathcal{R}^n	337
A.2.1 Alternierung	337
A.2.2 Divergenz	337
A.2.3 Rotation	337
Literaturverzeichnis	339
Index	345