

# Inhaltsverzeichnis

Übersicht verwendeter Symbole . . . . .	XXIX
Dimensionen wichtiger physikalischer Größen . . . . .	XXXI
<b>1 Einleitung und Zielstellung</b>	<b>1</b>
<b>2 Prinzipien und Formalismen der Physik</b>	<b>9</b>
2.1 Differentialprinzipien der Mechanik . . . . .	10
2.1.1 Das d' <sup>l</sup> Alembert-Prinzip . . . . .	11
2.1.2 Das Prinzip der virtuellen Arbeit . . . . .	12
2.1.3 Gaußsches Prinzip des kleinsten Zwanges . . . . .	15
2.2 Das Hamilton-Prinzip der extremalen Wirkung . . . . .	15
2.3 Lagrange-Hamilton-Formalismus für klassische Felder . . . . .	19
2.3.1 Das Hamilton-Prinzip als relativistisch invariantes Prinzip . . . . .	19
2.3.2 Die Euler-Lagrange-Gleichungen des Feldsystems . . . . .	21
2.3.3 Die Hamilton-Gleichungen . . . . .	22
<b>3 Elektromagnetische Felder</b>	<b>27</b>
3.1 Feldgleichungen, Invarianz und Feldbegriff . . . . .	28
3.1.1 Die Maxwellschen Gleichungen in vier- und in dreidimensionaler Form . . . . .	28
3.1.2 Formen der Maxwellschen Gleichungen in verschiedenen Maßsystemen . . . . .	31
3.1.3 Die Feldgleichungen und ihre Anzahl . . . . .	32
3.1.4 Forminvarianz der Maxwellschen Gleichungen . . . . .	33
3.1.4.1 Was heißt Forminvarianz . . . . .	33
3.1.4.2 Invarianz und Tensorkalkül . . . . .	34
3.1.4.3 Forminvariante Schreibweise der Maxwellschen Gleichungen . . . . .	37
3.1.5 Definition des Feldbegriffs . . . . .	38
3.1.6 Entdeckung der Ablenkung einer Magnetnadel durch Romagnosi . .	41
3.1.7 Konvektive und konduktive Ladungs- und Stromdichten . . . . .	42

3.2	Energieumwandlungen, Energieströmung und Leistungsbilanz im elektromagnetischen Feld . . . . .	43
3.3	Eindeutige Lösbarkeit der Maxwellschen Gleichungen . . . . .	45
3.4	Arten von Randbedingungen . . . . .	47
3.4.1	Hyperbolische Differentialgleichung und ihre Anfangsbedingungen	48
3.4.2	Elliptische Differentialgleichungen und ihre Randbedingungen . .	48
3.4.3	Parabolische Differentialgleichungen . . . . .	49
3.4.4	Homogene und inhomogene Randbedingungen . . . . .	50
3.4.5	Forderungen an die einzelnen Randwertaufgaben . . . . .	50
3.5	Beispiel zur Transformation bei Basiswechsel . . . . .	50
3.5.1	Beispiel einer Transformation bei Basiswechsel in schiefwinkligen Koordinaten . . . . .	51
3.5.1.1	Die schiefwinklige Basis . . . . .	51
3.5.1.2	Die metrischen Koeffizienten . . . . .	52
3.5.1.3	Betrag eines Vektors als Invariante . . . . .	53
3.5.1.4	Transformation bei Basiswechsel . . . . .	54
3.5.1.5	Koordinaten und Betrag des transformierten Vektors .	57
3.5.2	Transformationsbeziehungen zwischen krummlinigen Koordinatensystemen . . . . .	60
3.5.2.1	Kartesische und Kugelkoordinaten . . . . .	61
3.5.2.2	Übergang von den Kugel- zu den Zylinderkoordinaten und umgekehrt . . . . .	63
3.6	Einteilung der elektromagnetischen Felder . . . . .	67
3.6.1	Einteilung nach den Materialeigenschaften . . . . .	67
3.6.2	Gliederung nach dem Zeitverhalten . . . . .	68
3.6.2.1	Elektrostatische und magnetostatische Felder . . . . .	68
3.6.2.2	Stationäre Felder . . . . .	69
3.6.2.3	Das quasistationäre Feld . . . . .	69
3.6.2.4	Rasch veränderliche Felder . . . . .	70
3.7	Verhalten der Feldgrößen an Grenzflächen . . . . .	70
3.8	Kraftwirkungen im elektromagnetischen Feld . . . . .	75
3.8.1	Energieimpulstensor, Maxwellscher Spannungstensor und seine Transformation bei Basiswechsel . . . . .	75
3.8.2	Berechnung der Krafteinwirkung unter Berücksichtigung der Materialeigenschaften . . . . .	78

<b>4 Berechnung elektromagnetischer Felder</b>	<b>81</b>
4.1 Elektrostatische Felder . . . . .	82
4.1.1 Die Gleichungen von Laplace und Poisson . . . . .	83
4.1.2 Direkte Integration der Gleichungen von Laplace und Poisson . . .	84
4.1.2.1 Berechnung eindimensionaler Felder . . . . .	84
4.1.2.2 Lösung der Laplace-Gleichung für dreidimensionale Felder	89
4.1.2.3 Lösung der Laplace-Gleichung bei bekanntem Potential- verlauf längs der Symmetrieachse durch Reihenentwicklung	106
4.1.2.4 Lösung der Laplace-Gleichung bei bekanntem Poten- zialverlauf in einer Symmetrieebene durch Reihenansatz . . .	110
4.1.2.5 Der Greensche Satz . . . . .	112
4.1.2.6 Lösung der Gleichungen von Poisson . . . . .	113
4.1.3 Behandlung von elektrostatischen Feldern mit konformen Abbil- dungen . . . . .	118
4.1.3.1 Analytische Funktionen und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen . . . . .	118
4.1.3.2 Abbildungen durch Funktionen einer komplexen Veränderlichen . . . . .	121
4.1.3.3 Anwendung der konformen Abbildungen . . . . .	124
4.1.4 Der Satz von Schwarz-Christoffel . . . . .	129
4.1.4.1 Herleitung des Satzes . . . . .	130
4.1.4.2 Berechnung von konformen Abbildungsfunktionen für elektrostatische Anordnungen . . . . .	137
4.1.5 Die Abbildungsfunktion für das Smith-Diagramm . . . . .	144
4.1.6 Berechnung elektrischer Felder durch Spiegelung . . . . .	146
4.1.6.1 Beschreibung der Methode . . . . .	146
4.1.6.2 Anwendung der Methode . . . . .	149
4.1.7 Die Monte-Carlo-Methode . . . . .	151
4.1.8 Graphische Ermittlung des Feldbildes bei gegebener Elektrodenform	155
4.1.9 Übersicht zu den Ergebnisse . . . . .	155
4.2 Berechnung stationärer Felder . . . . .	157
4.2.1 Das stationäre elektrische Strömungsfeld . . . . .	157
4.2.1.1 Berechnungsmethoden und Anwendung des Superpositi- onsprinzips . . . . .	159
4.2.1.2 Methode der Spiegelung . . . . .	159
4.2.1.3 Anwendungen . . . . .	159
4.2.2 Das stationäre magnetische Feld . . . . .	162
4.2.2.1 Nichtexistenz wahrer magnetischer Ladungen . . . . .	162

4.2.2.2	Berechnungen des magnetischen Feldes über das Vektorpotential . . . . .	162
4.2.2.3	Herleitung des Gesetzes von Biot-Savart . . . . .	165
4.2.2.4	Berechnung des magnetischen Flusses aus dem Vektorpotential . . . . .	171
4.2.2.5	Anwendung konformer Abbildungen zur Berechnung von Strömungsfeldern . . . . .	171
4.2.2.6	Elektrotechnische Anwendungen . . . . .	172
4.3	Quasistationäre und raschveränderliche Felder . . . . .	177
4.3.1	Die Verschiebungsstromdichte . . . . .	177
4.3.2	Die Kontinuitätsgleichung im vierdimensionalen Raum und ihre Forminvarianz . . . . .	181
4.3.3	Die Feldgleichungen der magnetischen Feldstärke bei quasistationären Vorgängen . . . . .	183
4.3.4	Berechnung quasistationärer Felder . . . . .	184
4.3.5	Raschveränderliche Felder . . . . .	187
4.3.5.1	Der Wellenoperator und seine Invarianz gegenüber der Lorentz-Transformation . . . . .	189
4.3.5.2	Herleitung der Wellengleichung für die Feldstärke . . . . .	191
4.3.5.3	Wellengleichung für das elektrische skalare Potential und das magnetische Vektorpotential . . . . .	192
4.3.5.4	Lösung der Wellengleichung im $R^3$ - retardierte Potentiale	194
<b>5</b>	<b>Berechnung von Feldern mit numerischen Methoden</b>	<b>201</b>
5.1	Übersicht zu den Methoden . . . . .	202
5.2	Die Finite Differenzen Methode - FDM . . . . .	205
5.2.1	Diskretisierung . . . . .	206
5.2.2	Entwicklung der Potentialgleichung im Differenzenstern . . . . .	206
5.2.2.1	Der 5-Punkte-Differenzenstern . . . . .	206
5.2.2.2	Anwendung des 9-Punkte-Differenzensterns . . . . .	208
5.2.3	Die Randbedingungen . . . . .	208
5.2.4	Diskretisierungs- und Nummerierungsmöglichkeiten . . . . .	212
5.2.5	Lösung des Gleichungssystems . . . . .	213
5.2.6	Finite-Differenzen-Methode "per Hand" . . . . .	214
5.2.7	Aufbau eines Rechenprogramms . . . . .	219
5.3	Die Finite Elemente Methode - FEM . . . . .	219
5.3.1	Grundlagen . . . . .	219
5.3.1.1	Variationsansatz im ein- und im dreidimensionalen Fall .	220

5.3.1.2	Das Verfahren von Ritz . . . . .	225
5.3.2	Ansatzfunktion und Diskretisierung . . . . .	226
5.3.2.1	Strategie und Vorgehen in drei Schritten . . . . .	226
5.3.2.2	Die Diskretisierung des Feldgebietes . . . . .	227
5.4	Die Randelementmethode - BEM . . . . .	231
5.4.1	Die Methode . . . . .	232
5.4.2	Boundary element method - Strategie . . . . .	232
5.4.2.1	Diskretisierung . . . . .	236
5.4.2.2	Die Berechnung des elektrischen Potentials $\varphi$ und der Feldstärke $\vec{E}$ . . . . .	237
5.5	Anwendung der numerischen Feldberechnung . . . . .	238
5.5.1	Die Berechnung statischer Feldprobleme mit MAXWELL am Beispiel einer Ventilmagneten . . . . .	238
5.5.1.1	Auswahl des Feldtyps . . . . .	240
5.5.1.2	Das Koordinatensystem . . . . .	240
5.5.1.3	Eingabe der Geometrie . . . . .	241
5.5.1.4	Materialeingabe - <i>Setup Materials...</i> . . . . .	243
5.5.1.5	Quellen und Randbedingungen . . . . .	245
5.5.1.6	Die Parameter zur Berechnung . . . . .	246
5.5.1.7	MAXWELL und die Rechnungsschleifen . . . . .	247
5.5.1.8	Die Berechnung der Anordnung . . . . .	248
5.5.1.9	Ergebnisdarstellung und Postprozessor . . . . .	249
5.5.2	Berechnung transienter Felder mit PROFI . . . . .	250
5.5.2.1	Eingabe der Daten . . . . .	251
5.5.2.2	Parameter des Gleichungslösers . . . . .	255
5.5.2.3	Die Rechenergebnisse . . . . .	257
5.5.2.4	Ergebnisse und ihre Bewertung . . . . .	258
<b>6</b>	<b>Synthese von elektrischen und magnetischen Feldern</b>	<b>265</b>
6.1	Die Syntheseaufgabe für Felder . . . . .	266
6.2	Die Synthesestappen und die Methode der Feldsynthese . . . . .	267
6.3	Die Synthese von Potential- und Feldstärkefunktion im dreidimensionalen euklidischen Raum . . . . .	269
6.3.1	Synthese eines hyperbolischen Potentialverlaufs . . . . .	269
6.3.1.1	Die mathematische Synthese . . . . .	269
6.3.1.2	Feldsynthese . . . . .	272
6.3.1.3	Äquivalenzbetrachtungen . . . . .	273
6.3.1.4	Realisierung der Feldverlaufsfunktion . . . . .	274

6.3.2	Synthese eines zylindersymmetrischen Feldes . . . . .	275
6.3.2.1	Die mathematische Synthese . . . . .	275
6.3.2.2	Synthese des Feldverlaufs im Zylinder . . . . .	278
6.3.2.3	Die Realisierung der Ergebnisse . . . . .	278
6.3.3	Elliptischer Potentialverlauf und seine Synthese . . . . .	282
6.3.3.1	Die mathematische Sythese . . . . .	282
6.3.3.2	Synthese des elektrischen Feldes . . . . .	285
6.3.3.3	Zu Äquivalenzen . . . . .	286
6.3.3.4	Realisierung des Feldverlaufs . . . . .	286
6.4	Synthese von Feldern im vierdimensionalen Raum . . . . .	289
6.4.1	Minkowski-Raum und seine Metrik . . . . .	290
6.4.1.1	Basis und Dimension der Koordinaten des Feldtensors .	290
6.4.1.2	Metrik und Abstand im $\mathcal{R}^4$ . . . . .	292
6.4.1.3	Die Christoffel-Symbole . . . . .	294
6.4.1.4	Kovariante Ableitungen von Tensoren . . . . .	295
6.4.1.5	Linien-, Flächen- und Volumenelemente und die Integralsätze von Gauß und Stokes . . . . .	297
6.4.2	Mathematische Beziehungen des elektromagnetischen Feldes im Minkowski-Raum . . . . .	301
6.4.2.1	Quantitätsgrößen und Erregungstensor . . . . .	301
6.4.2.2	Zusammenhänge zwischen den Feldgrößen und der Metrik	304
6.4.3	Synthese von Feldern in Abhängigkeit von einer Koordinate . . . . .	308
6.4.3.1	Der Tensor des Feldes und seine Metrik . . . . .	308
6.4.3.2	Synthese eines fallenden Potentialverlaufs . . . . .	309
6.4.3.3	Synthese eines elliptischen Potentialverlaufs . . . . .	312
6.4.3.4	Synthese eines zylindersymmetrischen Feldes . . . . .	314
6.4.4	Abhängigkeit der Feldgrößen von zwei Koordinaten . . . . .	316
6.4.4.1	Feldtensor und Metrik . . . . .	316
6.4.4.2	Synthese des Potentialverlaufs . . . . .	317
6.4.5	Synthese von Feldern in Abhängigkeit von drei Koordinaten . . . . .	319
6.4.6	Synthese von magnetischen Feldern . . . . .	321
6.4.6.1	Zusammenhänge zwischen den Feldgrößen und der Metrik	321
6.4.6.2	Synthese magnetischer Felder in Abhängigkeit von einer Koordinate . . . . .	324

<b>A</b>	<b>329</b>
A.1 Koordinatensysteme und deren metrische Koeffizienten . . . . .	329
A.1.1 Kreiszylinderkoordinatensystem . . . . .	329
A.1.2 Hyperbolisches Zylinderkoordinatensystem . . . . .	331
A.1.3 Koordinatensystem sich berührender Zylinder . . . . .	332
A.1.4 Kugelkoordinatensystem . . . . .	333
A.1.5 Gestrecktes Elliptisches Koordinatensystem . . . . .	334
A.1.6 Abgeplattetes Elliptisches Koordinatensystem . . . . .	335
A.2 Rechenoperationen im $\mathcal{R}^n$ . . . . .	337
A.2.1 Alternierung . . . . .	337
A.2.2 Divergenz . . . . .	337
A.2.3 Rotation . . . . .	337
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>339</b>
<b>Index</b>	<b>345</b>