

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I Einführung in die Analysis des Unendlichen

I.1 Kartesische Koordinaten und Polynome	2
Algebra	2
„Algebra Nova“	6
Descartes' Geometrie	8
Polynomiale Funktionen	10
Übungen	15
I.2 Exponentialfunktion und binomischer Lehrsatz	18
Der binomische Lehrsatz	19
Die Exponentialfunktion	26
Übungen	29
I.3 Logarithmen und Flächen	31
Berechnung des Logarithmus	33
Berechnung von Flächen	35
Fläche unter der Hyperbel und natürlicher Logarithmus	37
Übungen	42
I.4 Trigonometrische Funktionen	43
Grundlegende Beziehungen und Folgerungen	46
Reihenentwicklungen	49
Arkusfunktionen	52
Berechnung von Pi	56
Übungen	59
I.5 Komplexe Zahlen und Funktionen	61
Die Eulersche Identität und ihre Folgerungen	63
Ein neuer Blick auf trigonometrische Funktionen	65
Eulers Produkt für die Sinus-Funktion	67
Übungen	70
I.6 Kettenbrüche	73
Ursprünge	73
Näherungsbrüche	76
Irrationalität	81
Übungen	84

Kapitel II Differential- und Integralrechnung

II.1 Die Ableitung	88
Die Ableitung	88
Ableitungsregeln	91
Parametrische Darstellung und implizite Gleichungen	95
Übungen	97
II.2 Höhere Ableitungen und Taylorreihen	99
Die zweite Ableitung	99
De Conversione Functionum in Series	102
Übungen	105
II.3 Einhüllende und Krümmung	107
Einhüllende einer Familie von Geraden	107
Die Kaustik eines Kreises	108
Einhüllende von ballistischen Kurven	110
Krümmung	111
Übungen	114

II.4 Integralrechnung	117
Stammfunktionen	117
Anwendungen	119
Integrationsmethoden	122
Taylorsche Formel mit Restglied	127
Übungen	128
II.5 Elementar integrierbare Funktionen	129
Integration rationaler Funktionen	129
Nützliche Substitutionen	134
Übungen	136
II.6 Näherungsweise Berechnung von Integralen	138
Reihenentwicklungen	138
Numerische Methoden	140
Asymptotische Entwicklungen	143
Übungen	145
II.7 Gewöhnliche Differentialgleichungen	146
Einige Klassen integrierbarer Gleichungen	151
Differentialgleichungen zweiter Ordnung	153
Übungen	155
II.8 Lineare Differentialgleichungen	157
Homogene Gleichung mit konstanten Koeffizienten	158
Inhomogene lineare Gleichungen	161
Die Cauchy-Gleichung	165
Übungen	166
II.9 Numerisches Lösen von Differentialgleichungen	168
Das Euler-Verfahren	168
Taylorreihen-Ansatz	170
Gleichungen zweiter Ordnung	172
Übungen	173
II.10 Die Euler-Maclaurin-Formel	174
Eulers Herleitung der Formel	174
De Usu Legitimo Formulae Summatoriaae Maclaurinianaee	177
Die Stirling-Formel	179
Die harmonische Reihe und die Eulersche Konstante	182
Übungen	183

Kapitel III Grundlagen der klassischen Analysis

III.1 Unendliche Folgen und reelle Zahlen	187
Konvergenz einer Folge	187
Konstruktion der reellen Zahlen	192
Monotone Folgen und kleinste obere Schranke	197
Häufungspunkte	199
Übungen	201
III.2 Unendliche Reihen	204
Konvergenzkriterien	205
Absolute Konvergenz	208
Doppelreihen	211
Das Cauchy-Produkt zweier Reihen	213
Vertauschen von unendlichen Reihen und Grenzwertbildung	215
Übungen	217
III.3 Reelle Funktionen und Stetigkeit	219
Stetige Funktionen	221
Der Zwischenwertsatz	223
Satz vom Maximum und Minimum	224

Monotone und Umkehrfunktionen	225
Limes einer Funktion	227
Übungen	228
III.4 Gleichmäßige Konvergenz und gleichmäßige Stetigkeit	231
Der Grenzwert einer Folge von Funktionen	231
Das Weierstraß-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz	234
Gleichmäßige Stetigkeit	235
Übungen	238
III.5 Das Riemann-Integral	239
Definitionen und Kriterien für Integrabilität	239
Integrierbare Funktionen	245
Ungleichungen und der Mittelwertsatz	247
Integration unendlicher Reihen	249
Übungen	251
III.6 Differenzierbare Funktionen	254
Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	258
Die Regeln von de L'Hospital	262
Ableitungen einer unendlichen Reihe	264
Übungen	265
III.7 Potenzreihen und Taylorreihen	268
Bestimmung des Konvergenzradius	269
Stetigkeit	270
Differentiation und Integration	271
Taylorreihen	272
Übungen	276
III.8 Uneigentliche Integrale	278
Beschränkte Funktionen auf unendlichen Intervallen	278
Unbeschränkte Funktionen auf endlichen Intervallen	281
Die Eulersche Gammafunktion	282
Übungen	284
III.9 Zwei Sätze über stetige Funktionen	285
Stetige, aber nirgends differenzierbare Funktionen	285
Der Approximationssatz von Weierstraß	287
Übungen	292

Kapitel IV Differentialrechnung in mehreren Variablen

IV.1 Topologie des n-dimensionalen Raumes	295
Abstände und Normen	295
Konvergenz von Vektorfolgen	297
Umgebungen, offene und abgeschlossene Mengen	300
Kompakte Mengen	305
Übungen	308
IV.2 Stetige Funktionen	310
Stetige Funktionen und Kompaktheit	312
Gleichmäßige Stetigkeit und gleichmäßige Konvergenz	313
Lineare Abbildungen	316
Hausdorffs Charakterisierung stetiger Funktionen	318
Integrale mit Parametern	321
Übungen	322
IV.3 Differenzierbare Funktionen von mehreren Variablen	324
Differenzierbarkeit	326
Gegenbeispiele	328
Eine geometrische Interpretation des Gradienten	329
Der Mittelwertsatz	332

Der Satz von der impliziten Funktion	334
Differenzierbarkeit von Integralen bezüglich eines Parameters	336
Übungen	337
IV.4 Höhere Ableitungen und Taylorreihen	341
Taylorreihen in zwei Variablen	344
Taylorreihen in n Variablen	346
Optimierungsprobleme	348
Extrema mit Nebenbedingungen (Lagrange-Multiplikatoren)	351
Übungen	354
IV.5 Mehrdimensionale Integrale	356
Doppelintegrale über ein Rechteck	356
Nullmengen und unstetige Funktionen	360
Beliebige beschränkte Integrationsbereiche	363
Die Transformationsformel für Doppelintegrale	365
Integrale mit unbeschränktem Integrationsbereich	372
Übungen	374
Anhang: Originalzitate	378
Literaturverzeichnis	385
Symbolverzeichnis	396
Personen- und Sachverzeichnis	398