

Inhaltsverzeichnis

I	Analysis 1	9
1	Grundlagen	11
1.1	Motivation	11
1.2	Grundlagen	12
1.2.1	Funktionen	12
1.2.2	Eigenschaften von Funktionen	13
1.2.3	Verkettete Funktionen	15
1.2.4	Reelle Funktionen	17
1.2.5	Eigenschaften reeller Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	18
1.2.6	Polynome	19
1.2.7	Gebrochen rationale Funktionen	24
1.2.8	Gleichungen und Ungleichungen	24
1.3	Komplexe Analysis	28
1.3.1	Rechenregeln für komplexe Zahlen in Polarkoordinaten	28
1.3.2	Eigenschaften von $z = e^{i\varphi}$	30
1.3.3	Radizieren (Wurzel ziehen) von komplexen Zahlen	30
1.3.4	Anwendung: Faktorisierung von Polynomen mit komplexen Koeffizienten	33
2	Folgen und Reihen	35
2.0.5	Rekursionen	36
2.0.6	Differenzenrekursion	39
2.0.7	Zusammenfassung	40
2.0.8	Summen (Reihen)	41
2.0.9	Rechenregeln für Summen	41
2.0.10	Wichtige Summen	42
2.0.11	Rechnen mit Summen	46
2.1	Binomialkoeffizienten und der binomische Lehrsatz	48
2.1.1	Der Binomialkoeffizient	48
2.1.2	Der binomische Lehrsatz	53
3	Konvergenz von Folgen, Reihen und Funktionen	55
3.1	Grundlagen über Mengen und die Sätze von Bolzano-Weierstrass	55

3.2	Konvergenz von Folgen	62
3.2.1	Monotonie	62
3.2.2	Konvergenz und Grenzwert einer Folge	63
3.2.3	Rechnen mit konvergenten Folgen	70
3.2.4	Rechenregeln für Grenzwerte	72
3.2.5	Konvergenz monotoner Folgen	76
3.2.6	Die eulersche Zahl	77
3.2.7	Konvergenz rekursiver Folgen	80
3.2.8	Konvergenz komplexer Folgen	84
3.2.9	Cauchy-Konvergenz	84
3.2.10	Zusammenfassung Folgen	86
3.3	Unendliche Reihen	87
3.3.1	Die unendliche geometrische Reihe	89
3.3.2	Cauchy Reihen	91
3.3.3	Teleskopsummen	94
3.3.4	Konvergenzkriterien für fast immer nicht negative Reihen	96
3.3.5	Alternierende Reihen	105
3.3.6	Zusammenfassung Konvergenzkriterien	108
3.3.7	Umordnung von Reihen	109
3.3.8	Das Cauchy-Produkt	110
3.4	Potenzreihen	112
3.4.1	Spezielle Potenzreihen	118
3.4.2	Die eulersche Zahl und die exponentielle Funktion	119
3.5	Grenzwerte von Funktionen	127
3.5.1	Stetigkeit	127
3.5.2	Das $\varepsilon - \delta$ -Kriterium	129
3.5.3	Stetigkeit verketteter Funktionen	132
3.5.4	Weitere Stetigkeitsuntersuchungen	133
3.5.5	Stetigkeit der Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$	136
3.5.6	Unstetigkeit	140
3.5.7	Stetigkeit auf Intervallen	142
3.5.8	Lipschitz-Stetigkeit	144
3.5.9	Der Zwischenwertsatz	148
3.5.10	Der Fixpunktsatz	149
3.5.11	Eigenschaften der Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$	153
3.5.12	Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$	159
3.5.13	Die Logarithmusfunktion	160
3.5.14	Die hyperbolischen Funktionen	161
4	Differentialrechnung	165
4.1	Motivation	165
4.2	Verallgemeinerung	169
4.2.1	Einige Grenzwerte von Sin, Cos, Exp	171
4.2.2	Berechnung elementarer Ableitungen	174
4.3	Die Tangentengleichung	177
4.4	Ableitungsregeln	178

4.5	Lokale Extrema	186
4.6	Der Mittelwertsatz	187
4.7	Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Potenzreihen	190
4.8	Monotonie	194
4.9	Die Grenzwertsätze von de L'Hospital	197
4.10	Krümmungseigenschaften	201
4.11	MacLaurin- und Taylorreihenentwicklung	202
4.12	Die Taylorreihe	207
4.12.1	Konvergenz der Taylorreihe	208
4.12.2	Beispiele	208
4.12.3	Anwendung der Potenzreihen	209
4.12.4	Konvergenzgeschwindigkeit von Taylorreihen	210
4.12.5	Zusammenhang zwischen Taylorreihen und Extremwerten	212
4.13	Numerische Berechnung von Ableitungen	214
4.14	Das Tangentenverfahren von Newton	216
5	Integration	221
5.1	Einleitung	221
5.1.1	Das unbestimmte Integral	229
5.1.2	Das bestimmte Integral	230
5.1.3	Die Flächenfunktion	231
5.1.4	Stammfunktion und Flächenfunktion	232
5.1.5	Die Stammfunktion von $1/x$	240
5.1.6	Partialbruchzerlegung	241
5.2	Flächenberechnungen	246
5.3	Fläche und Integral zwischen zwei Funktionen	247
5.4	Integration zur Berechnung von Flächen zwischen mehreren Funktionen	249
5.5	Die Mittelwertsätze der Integralrechnung	250
5.6	Das Restglied der Taylorreihe in Integraldarstellung	251
5.6.1	Das Restglied nach Lagrange	253
5.7	Längenberechnung	254
5.8	Mantelflächenberechnung	258
5.9	Rotationsvolumen	260
5.10	Numerische Berechnung von Integralen	262
5.11	Differentiation von Integralen mit variablen Grenzen	265
5.12	Parameterintegrale	266
6	Wachstums- und Zerfallsprozesse	269
6.1	Grundlagen der Evolutionsgleichungen	269
6.1.1	Einleitung: Die Evolutionsgleichung	270
6.1.2	Diskret oder kontinuierlich ?	272
6.2	Ungebremstes Wachstum	273
6.2.1	Der diskrete Fall	273
6.2.2	Zeiteile	274
6.2.3	Grundsätzliches	275

6.2.4	Der Übergang zum kontinuierlichen Modell	277
6.2.5	Zusammenhang zwischen $k_{diskret}$ und k_{kont}	279
6.3	Gebremstes Wachstum - Störung erster Ordnung	281
6.4	Das logistische Wachstum - Störungen zweiter Ordnung	288
6.5	Systeme von Differenzengleichungen	293
6.6	Zusammenfassung Wachstum und Zerfall	295

II Analysis 2 297

7	Uneigentliche Integrale	299
7.1	Unendliche Integrationsintervalle	301
7.2	Unbeschränkte Integranden auf endlichen Integrationsintervallen	303
7.3	Absolute Konvergenz	305
7.4	Weitere Konvergenzkriterien	306
7.4.1	Majoranten und Minorantenkriterium für unbeschränkte Integrationsintervalle	306
7.4.2	Majoranten und Minorantenkriterium für unbeschränkte Integranden	307
7.5	Das Integralkriterium zur Konvergenz von Reihen	311
8	Funktionen mehrerer Veränderlicher	321
8.1	Grundbegriffe	321
8.2	Rechnen in Vektorräumen	321
8.3	Metrische Räume	322
8.4	Normen im $\mathbb{R}^n$	325
8.5	Das Skalarprodukt	328
8.6	Mengen im $\mathbb{R}^n$	335
8.6.1	Offene Mengen	335
8.6.2	Abgeschlossene Mengen	336
8.6.3	Beschränktheit und Ordnung	336
8.7	Folgen im $\mathbb{R}^n$	336
8.8	Darstellungsformen der Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$	339
8.9	Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$	341
8.9.1	Grenzwerte im $\mathbb{R}^n$	341
8.9.2	Schnittfunktionen (Partielle Funktionen)	341
8.9.3	Partielle Ableitungen	342
8.9.4	Differentiation komplexer Zahlen	343
8.9.5	Stetigkeit	344
8.9.6	Gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz Stetigkeit	348
8.9.7	Fixpunkte im $\mathbb{R}^n$	349
8.9.8	Der Gradient	350
8.9.9	Die Tangentialebene	352

8.9.10	Die Richtungsableitung	354
8.10	Das vollständige Differential	359
8.10.1	Anwendung: Fehlerrechnung	360
8.10.2	Der relative Fehler	361
8.10.3	Parametrische Funktionen	362
8.10.4	Die Kettenregel	363
8.10.5	Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern	364
8.10.6	Anwendung: Implizite Differentiation	366
8.11	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	368
8.11.1	Divergenz und Rotation	369
8.12	Die Taylorentwicklung für $f(x, y)$	373
8.12.1	Eindimensional	373
8.12.2	Zweidimensional	374
8.13	Relative Extremwerte ohne Nebenbedingungen	376
8.13.1	Der eindimensionale Fall	376
8.13.2	Lokale Extrema bei zwei Unbekannten	377
8.13.3	Schreibweise als Hesse-Matrix	383
8.13.4	Extremwerte im $\mathbb{R}^n$	385
8.13.5	Weitere Verfahren zur Analyse der Kandidaten	386
8.13.6	Beispiel 1: Nektar sammelnde Bienen	387
8.13.7	Beispiel 2: Zugvögel (ohne Happy End)	390
8.13.8	Anwendung der Extremwertberechnung: Regressionsanalyse	393
8.13.9	Approximation von Funktionen	399
8.14	Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen	400
8.14.1	Lagrange Multiplikatoren	401
8.15	Parametrische Funktionen und Kurvenintegrale	410
8.15.1	Der Tangentenvektor	410
8.15.2	Kurvenintegrale	411
8.15.3	Die Potentialfunktion	419
9	Mehrdimensionale Integration	425
9.1	Einleitung	425
9.2	Berechnung der Integrale	429
9.2.1	Berechnung von Integralen in kartesischen rechteckigen Koordinaten	430
9.2.2	Integration über kartesische krummlinige Bereiche	431
9.2.3	Weitere Anwendungen	433
9.2.4	Integration in Polarkoordinaten	435
9.2.5	Uneigentliche Integrale	442
9.3	Dreifachintegrale	445
9.3.1	Schwerpunktsberechnungen	446

10 Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)	451
10.1 Einleitung	451
10.1.1 Einführende Beispiele (s. Wachstum und Zerfall)	452
10.1.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	455
10.2 Lösungsverfahren für DGL'en erster Ordnung	458
10.2.1 Geometrische Interpretation von $y'=f(x,y)$	458
10.2.2 Substitution	461
10.2.3 Lineare DGL'en	466
10.2.4 Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten	470
10.2.5 Die Bernoulli-Differentialgleichung	474
10.2.6 Zusammenfassung der Lösungsverfahren für DGL 1. Ordnung	475
10.2.7 Weitere linear inhomogene DGL'en mit nicht-konstanten Koeffizienten	478
10.2.8 Potenzreihenansätze	479
10.2.9 Exakte Differentialgleichungen	482
10.3 Numerische Lösung einer expliziten DGL 1. Ordnung	488
10.4 Lineare DGL'en 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten	491
10.4.1 Lineare Differentialgleichungssysteme	498
10.5 Anwendung 1: Die harmonische Schwingung	503
10.6 Wachstumsprozesse mit Hilfe der Differentialgleichungen	507
10.7 Differentialgleichungen für Störungen zweiter Ordnung	509