

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	V
Liste der verwendeten Symbole	XV
1 Newton'sche Mechanik	1
1.1 Die Grundgleichungen der Newton'schen Mechanik	1
1.1.1 Gravitationspotential und Kraft	1
1.1.2 Bewegungsgleichung nach Newton	2
1.1.3 Gravitationspotential in der Nähe der Erdoberfläche	3
1.1.4 Die Feldgleichung nach Newton	4
1.2 Gravitationspotential und Poisson-Gleichung	6
1.3 Der fallende Apfel und das Prinzip der kleinsten Wirkung	8
1.3.1 Variation der Bahnkurve	9
1.3.2 Lagrange-Funktion und Wirkung	10
1.4 Ist die Newton'sche Mechanik falsch?	13
2 Spezielle Relativitätstheorie	15
2.1 Geschichte der speziellen Relativitätstheorie	15
2.2 Postulate der speziellen Relativitätstheorie	16
2.3 Galilei-Transformation	16
2.4 Raumkontraktion und Zeitdilatation	18
2.4.1 Zeitdilatation	18
2.4.2 Raumkontraktion	20
2.5 Lorentz-Transformation	22
2.6 Invarianzelement im relativistischen Fall	24
2.7 Eigenzeit	26
2.8 Vierervektoren	27
2.9 Raumzeit-Diagramme	29
2.9.1 Definition des Raumzeit-Diagramms	29

2.9.2	Raumartig, zeitartig, lichtartig	33
2.9.3	Lichtkegel	34
2.9.4	Gleichzeitigkeit	34
2.9.5	Raumkontraktion	35
2.9.6	Zeitdilatation	36
2.9.7	Uhrenparadoxon	37
2.9.8	Eigenzeit im Raumzeit-Diagramm	38
2.9.9	Das Zwillingsparadoxon	39
2.10	Eigenzeitdiagramme	40
2.10.1	Zeitkegel	40
2.10.2	Eigenzeitkreis	41
3	Gravitation und die Krümmung des Raumes	43
3.1	Geschichte der allgemeinen Relativitätstheorie	43
3.2	Postulate der allgemeinen Relativitätstheorie	44
3.3	Der gekrümmte Raum	44
3.3.1	Gravitation und Beschleunigung	44
3.3.2	Gravitation und Krümmung des Raumes	45
3.3.3	Die Formulierung der allgemeinen Relativitätstheorie	46
3.4	Wie lässt sich Krümmung messen?	47
3.4.1	Messung der Krümmung im zweidimensionalen Raum	49
3.4.2	Krümmung in höherdimensionalen Räumen	50
3.5	Krümmung unterschiedlicher Geometrien	50
4	Vektoren und Koordinatensysteme	53
4.1	Definitionen	53
4.1.1	Vektoren, Vektorkomponenten und Basen	53
4.1.2	Summationskonvention	54
4.2	Abstand und Metrik	56
4.3	Kovariante und kontravariante Basis	58
4.3.1	Definition	58
4.3.2	Bestimmung der kontravarianten Basis	60
4.3.3	Rechnen mit ko- und kontravarianten Vektoren	63
4.4	Rechnen mit indizierten Größen	67
4.4.1	Austausch von Indizes	67
4.4.2	Herauf- und Herunterschieben von Indizes	68
4.4.3	Kontraktion indizierter Größen	69
4.4.4	Projektion von Vektoren	70
4.4.5	Symmetrie indizierter Gleichungen	71
4.5	Indizierte Größen in der Physik	72
4.5.1	Polarisation isotroper Materialien	73

4.5.2	Polarisation anisotroper Materialien	75
4.5.3	Tensoren	79
5	Metrik und die Vermessung des Raumes	81
5.1	Metrik und Abstand	81
5.1.1	Differentielle Länge	81
5.1.2	Metrik in kartesischen Koordinaten	82
5.1.3	Metrik in Polarkoordinaten	83
5.2	Metrik und Krümmung	83
5.3	Metriken im Raum	84
5.3.1	Kartesische Koordinaten im dreidimensionalen Raum	84
5.3.2	Kugelkoordinaten im dreidimensionalen Raum	85
5.3.3	Zylinderkoordinaten im dreidimensionalen Raum	86
5.4	Metriken in der Raumzeit	86
5.4.1	Minkowski-Metrik in kartesischen Koordinaten	87
5.4.2	Minkowski-Metrik in Kugelkoordinaten	87
5.5	Eigenschaften der Metrik	88
5.6	Metriken von Räumen mit konstanter Krümmung	88
5.6.1	Metriken von Flächen mit konstanter Krümmung	89
5.6.2	Allgemeine Darstellung einer zweidimensionalen Metrik mit konstanter Krümmung	90
6	Vektoren in gekrümmten Koordinaten	93
6.1	Partielle Ableitung	93
6.1.1	Ableitung in geraden Koordinaten	93
6.1.2	Ableitung in gekrümmten Koordinaten	94
6.2	Basisvektoren und Christoffelsymbole	96
6.2.1	Definition der Christoffelsymbole	96
6.2.2	Bestimmung der Christoffelsymbole aus der Metrik	98
6.3	Kovariante Ableitung	101
6.3.1	Definition der kovarianten Ableitung	101
6.3.2	Sonderfälle der kovarianten Ableitung	104
6.4	Paralleltransport	105
7	Messung der Krümmung	109
7.1	Krümmung im zweidimensionalen Raum	109
7.2	Riemann-Krümmung	111
7.2.1	Krümmung in höherdimensionalen Räumen	111
7.2.2	Berechnung der Riemann-Krümmung	113
7.2.3	Symmetrieeigenschaften der Riemann-Krümmung	116

7.2.4	Kontraktion der Riemann-Krümmung	117
7.3	Die Bianchi-Identität	118
8	Die Einstein'sche Feldgleichung	121
8.1	Ansatz zur Bestimmung der Feldgleichung	121
8.2	Die Energie-Impuls-Matrix	123
8.2.1	Energie-Impuls-Matrix für bewegte Materie	123
8.2.2	Energie- und Impulserhaltung	126
8.2.3	Energie-Impuls-Matrix für ruhende Materie	128
8.2.4	Energie-Impuls-Matrix für den materiefreien Raum	128
8.2.5	Energie-Impuls-Matrix für eine Flüssigkeit	128
8.2.6	Eigenschaften der Energie-Impuls-Matrix	129
8.3	Herleitung der Einstein'schen Feldgleichung	130
8.3.1	Einstein-Krümmung	130
8.3.2	Masse und die Krümmung des Raumes	131
8.3.3	Die kosmologische Konstante	133
8.4	Vorgehensweise bei der Lösung der Feldgleichung	133
9	Schwarzschild-Metrik oder wie Masse den Raum krümmt	135
9.1	Definition der Schwarzschild-Metrik	135
9.2	Berechnung der Schwarzschild-Metrik	136
9.2.1	Ansatz zur Bestimmung der Schwarzschild-Metrik	136
9.2.2	Gravitation und Zeitdilatation	137
9.2.3	Gravitation und Raumkontraktion	141
9.2.4	Der Schwarzschildradius	142
9.2.5	Die Schwarzschild-Metrik	143
9.3	Schwarze Löcher	144
9.4	Die Bestimmung des Faktors κ	145
10	Bewegungsgleichung nach Einstein	147
10.1	Bewegung von Teilchen im Raum	147
10.2	Geodätische Gleichung	148
10.2.1	Lösung der geodätischen Gleichung im Raum	149
10.3	Bewegung von Teilchen in der Raumzeit	152
10.3.1	Die geodätische Gleichung in der Raumzeit	152
10.3.2	Das Prinzip der kleinsten Wirkung	152
10.3.3	Der Newton'sche Grenzfall	153
10.4	Vorgehensweise bei der Lösung der Bewegungsgleichung	155
10.5	Warum der Apfel vom Baum fällt	155
10.5.1	Lichtstrahlen und das Fermat'sche Prinzip	156

10.5.2	Teilchen und die Wellenfunktion	157
10.5.3	Wellenfunktion und Wirkung	160
11	Die Krümmung der Raumzeit	163
11.1	Darstellung der Raumzeit-Krümmung	163
11.2	Die Methode der Einbettung	166
11.2.1	Die Einbettung zweidimensionaler Metriken in den Raum	166
11.2.2	Einbettung der Schwarzschild-Metrik	170
11.3	Die Methode der geodätisch äquivalenten Abbildung	171
11.3.1	Definition der geodätisch äquivalenten Abbildung	171
11.3.2	Bestimmung der Metrikoeffizienten	175
11.3.3	Grafische Darstellung der geodätisch äquivalenten Metrik	177
11.4	Der Fall der Apfels in der gekrümmten Raumzeit	179
12	Lichtablenkung in der gekrümmten Raumzeit	181
12.1	Ausbreitung von Licht im Gravitationsfeld	181
12.2	Aufstellen der Bewegungsgleichung	182
12.2.1	Bestimmung der Christoffelsymbole	183
12.2.2	Auswertung der geodätischen Gleichung	184
12.2.3	Das Wegelement der Raumzeit für Licht	185
12.3	Lösung der Bewegungsgleichung	186
12.3.1	Lösung für den nichtrelativistischen Fall	186
12.3.2	Lösung für den relativistischen Fall	187
13	Bewegung von Körpern in der gekrümmten Raumzeit	191
13.1	Periheldrehung im Gravitationsfeld	191
13.2	Aufstellen der Bewegungsgleichung	192
13.3	Die Gleichung der Bahnkurve	193
13.3.1	Ableitung der Bahnkurve	193
13.3.2	Lösung für den Newton'schen Fall	194
13.3.3	Lösung für den relativistischen Fall	195
13.4	Die Energiebilanzgleichung	196
14	Robertson-Walker-Metrik und das gekrümmte Universum	201
14.1	Definition der Robertson-Walker-Metrik	201
14.2	Ansatz zur Bestimmung der Metrik	202
14.3	Auswertung der Feldgleichung	204
14.4	Der Skalenfaktor und die Friedmann-Gleichungen	205

15	Kosmologie	209
15.1	Das expandierende Universum	209
15.1.1	Der Hubble-Parameter	209
15.1.2	Der Skalenfaktor der Expansion	210
15.2	Friedmann-Gleichung für unser Universum	212
15.2.1	Die allgemeine Friedmann-Gleichung	212
15.2.2	Die vereinfachte Friedmann-Gleichung	214
15.2.3	Berechnung der zeitlichen Entwicklung unseres Universums	216
15.3	Lösung der Friedmann-Gleichung	219
15.4	Grafische Darstellung der Expansion	220
15.4.1	Licht und Galaxien im Raumzeit-Diagramm	220
15.4.2	Das Universum mit konstantem Hubble-Parameter	221
15.4.3	Das Universum mit zeitabhängigem Hubble-Parameter	224
15.5	Emissionsentfernung und physikalische Entfernung	227
16	Gravitationswellen	231
16.1	Die Wellengleichung	231
16.1.1	Die Metrik bei schwachem Gravitationsfeld	231
16.1.2	Die Linearisierung der Einstein'schen Feldgleichung	232
16.2	Eigenschaften von Gravitationswellen	235
16.2.1	Ausbreitungsgeschwindigkeit	235
16.2.2	Polarisation	236
16.3	Die Erzeugung von Gravitationswellen	239
16.3.1	Die Quadrupolgleichung	239
16.3.2	Doppelsternsysteme	243
16.4	Detektion von Gravitationswellen	246
A	Anhang	251
A.1	Drehmatrix	251
A.2	Prinzip der kleinsten Wirkung	252
A.3	Der kanonische Impuls	253
A.4	Glossar	254
	Literaturverzeichnis	259
	Index	261