

Inhaltsverzeichnis

1	Ziele der Analysis, Aspekte und Grundvorstellungen	1
1.1	Ziele, Standards, Kompetenzen	1
1.2	Allgemeine Ziele des Analysisunterrichts	4
1.2.1	Pragmatischer Gesichtspunkt	4
1.2.2	Kultureller Gesichtspunkt	5
1.2.3	Erkenntnistheoretischer Gesichtspunkt	6
1.2.4	Kognitiv-konstruktiver Gesichtspunkt	7
1.2.5	Sprachlich-kommunikativer Gesichtspunkt	7
1.2.6	Schöpferisch-kreativer Gesichtspunkt	8
1.2.7	Mathematisch-deduktiver Gesichtspunkt	8
1.3	Inhaltliche Ziele des Analysisunterrichts	9
1.3.1	Zentrale Begriffe der Analysis kennenlernen	9
1.3.2	Argumentieren, Begründen und Beweisen in der Analysis	10
1.3.3	Grundlegende Verfahren der Analysis anwenden	11
1.3.4	Mit Analysis Anwendungen und Modelle bearbeiten	11
1.4	Digitale Mathematikwerkzeuge einsetzen	13
1.4.1	Entdecken mathematischer Zusammenhänge	14
1.4.2	Darstellungsmöglichkeiten	14
1.4.3	Reduktion schematischer Abläufe	15
1.4.4	Kontrollmöglichkeiten	15
1.5	Aspekte und Grundvorstellungen zu mathematischen Begriffen	16
1.5.1	Aspekte, Grundvorstellungen und ihre Beziehungen zueinander	16
1.5.2	Unterscheidung: Universelle und individuelle Grundvorstellungen	18
1.5.3	Unterscheidung: Primäre und sekundäre Grundvorstellungen	19
1.5.4	Nutzen von Grundvorstellungen	19
2	Funktionen	23
2.1	Historische Entwicklung des Funktionsbegriffs	23
2.1.1	Der Funktionsbegriff von Newton	24
2.1.2	Der Funktionsbegriff von Leibniz	25
2.1.3	Der Funktionsbegriff von Euler	26

2.1.4	Der Funktionsbegriff von Dirichlet	27
2.1.5	Der Funktionsbegriff von Bourbaki	29
2.2	Reelle Zahlen	30
2.2.1	Darstellung reeller Zahlen	30
2.2.2	Warum Analysis auf \mathbb{R} und nicht auf \mathbb{Q} ?	31
2.2.3	Die Vollständigkeit der Menge \mathbb{R}	33
2.3	Phänomene zur Entwicklung des Funktionsbegriffs in der Schule	36
2.3.1	Zeitliche Entwicklungen	36
2.3.2	Kausalzusammenhänge	37
2.3.3	Willkürlich gesetzte Zusammenhänge	38
2.3.4	Eigenschaften von Objekten	38
2.3.5	Funktionale Zusammenhänge bei Rechentermen	39
2.3.6	Geometrische Abbildungen	41
2.3.7	Dynamische Geometrie	41
2.3.8	Von Phänomenen zur Definition des Begriffs der Funktion	42
2.3.9	Sinn einer Definition von Funktionen in der Schule	44
2.4	Aspekte und Grundvorstellungen zu Funktionen	46
2.4.1	Aspekte des Funktionsbegriffs	47
2.4.2	Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff	47
2.5	Darstellungsformen von Funktionen	50
2.5.1	Reale situative Darstellungen	51
2.5.2	Grafische Darstellungen	51
2.5.3	Tabellarische Darstellungen	54
2.5.4	Darstellungen mit Termen	55
2.5.5	Verbale Darstellungen	55
2.5.6	Wechsel von Darstellungsformen	56
2.6	Funktionen mit Parametern	57
2.6.1	Einfluss von Parametern auf Funktionsgraphen	57
2.6.2	Funktionale Abhängigkeiten zwischen Parametern und Graphen	64
2.6.3	Ortskurven von Punkten auf Funktionsgraphen	66
2.7	Funktionales Denken	69
2.8	Aufgaben	71
3	Folgen und Grenzwerte	73
3.1	Historische Entwicklung und fachliche Klärung	73
3.1.1	Dynamische und statische Vorstellungen vom Unendlichen	74
3.1.2	Die historische Entwicklung des Grenzwertbegriffs	76
3.1.3	Die formale Definition des Grenzwertes	77
3.1.4	Zum Lehren des Grenzwertbegriffs	78
3.1.5	Der formale Grenzwertbegriff im Mathematikunterricht	79
3.1.6	Der intuitive oder propädeutische Grenzwertbegriff	80
3.1.7	Der propädeutische Grenzwertbegriff in den Bildungsstandards	82

3.2	Folgen in der Sekundarstufe I	83
3.2.1	Ein „PISA-Beispiel“	83
3.2.2	Dreiecks- und Tetraederzahlen	84
3.2.3	Irrationale Zahlen und Heron-Algorithmus	86
3.3	Aspekte und Grundvorstellungen zum Folgenbegriff	88
3.3.1	Aspekte des Folgenbegriffs	88
3.3.2	Grundvorstellungen zum Folgenbegriff	94
3.4	Unterrichtliche Zugänge zum Folgenbegriff	97
3.4.1	Proportionale Folgen und der Begriff der konstanten Änderungsrate	98
3.4.2	Antiproportionale Folgen und der Begriff der variablen Änderungsrate	99
3.4.3	Arithmetische Folgen	100
3.4.4	Quadratische Folgen	101
3.4.5	Geometrische Folgen und Wachstumsprozesse	102
3.5	Aspekte und Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff	103
3.5.1	Aspekte des Grenzwertbegriffs	103
3.5.2	Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff	104
3.6	Unterrichtliche Zugänge zum Grenzwertbegriff	107
3.6.1	Zugänge auf der numerischen und grafischen Ebene	107
3.6.2	Hinweise zur Verwendung digitaler Werkzeuge	109
3.6.3	Kritische Überlegungen zum (intuitiven) Grenzwertverständnis	110
3.6.4	Diskrete Zugänge auf symbolischer Ebene	112
3.6.5	Zugänge über reelle Funktionen	116
3.6.6	Vom dynamischen zum statischen Aspekt	118
3.7	Vorschlag für einen diskreten Zugang zum Ableitungsbegriff	128
3.7.1	Differenzenfolgen	129
3.7.2	\mathbb{Z} -Polynome	130
3.7.3	Exponential- \mathbb{Z} -Funktionen	132
3.8	Aufgaben	133
4	Differenzialrechnung	137
4.1	Historische Entwicklung und fachliche Klärung zur Differenzialrechnung	138
4.1.1	Historische Entwicklung	138
4.1.2	Fachliche Klärung	140
4.2	Aspekte und Grundvorstellungen zur Ableitung	147
4.2.1	Grundvorstellung: Lokale Änderungsrate	147
4.2.2	Grundvorstellung: Tangentensteigung	149
4.2.3	Grundvorstellung: Lokale Linearität	151
4.2.4	Grundvorstellung: Ableitung als Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen	151

4.3	Zugänge zum Ableitungsbegriff im Mathematikunterricht	154
4.3.1	Sekanten und Tangenten (geometrische Betrachtungen am Graphen)	155
4.3.2	Lokale lineare Approximation	158
4.3.3	Beschreibung von Änderungsprozessen mit mittleren und lokalen Änderungsraten	159
4.3.4	Die Grundvorstellung „Verstärkungsfaktor“ als zentrale Idee eines Unterrichtsgangs	161
4.3.5	Vergleich der vier Zugänge	162
4.4	Ableitungsfunktionen und Ableitungsregeln	164
4.4.1	Der Kalkül: sinnvoller Umgang mit Regeln	164
4.4.2	Von einzelnen Stellen zu Intervallen: die Ableitungsfunktion . . .	165
4.4.3	Faktor- und Summenregel	167
4.4.4	Ableitung von Polynomfunktionen	169
4.4.5	Produktregel	170
4.4.6	Kettenregel	172
4.4.7	Quotientenregel	176
4.4.8	Umkehrfunktionen und ihre Ableitung	177
4.4.9	Ableitung von Exponential- und Logarithmusfunktionen	179
4.4.10	Ableitung trigonometrischer Funktionen	183
4.4.11	Übersicht: Funktionstypen der Schulmathematik	190
4.5	Kurvendiskussion	191
4.5.1	Begriffe im Zusammenhang mit der Kurvendiskussion	193
4.5.2	Von einzelnen Stellen zu Intervallen – Monotoniekriterien	194
4.5.3	„Umgekehrte“ und qualitative Kurvendiskussion	198
4.5.4	Krümmung und Wendepunkte	199
4.5.5	Extremwertaufgaben: die fundamentale Idee der Optimalität . . .	202
4.5.6	Das Newton-Verfahren	207
4.6	Modellieren und Differenzialrechnung	209
4.7	Aufgaben	214
5	Integralrechnung	217
5.1	Historische Entwicklung und fachliche Klärung des Integralbegriffs . .	218
5.1.1	Historische Entwicklung	218
5.1.2	Fachliche Klärung	222
5.2	Flächen- und Volumenberechnung in der Sekundarstufe I	230
5.2.1	Flächenberechnung in der Sekundarstufe I	230
5.2.2	Volumenberechnung in der Sekundarstufe I	235
5.3	Aspekte und Grundvorstellungen zum Integralbegriff	238
5.3.1	Produktsummenaspekt	239
5.3.2	Stammfunktionsaspekt	239
5.3.3	Maßaspekt	243

5.3.4	Flächeninhaltsgrundvorstellung	244
5.3.5	Rekonstruktionsgrundvorstellung	247
5.3.6	Mittelwertsgrundvorstellung	250
5.3.7	Kumulationsgrundvorstellung	253
5.3.8	Diskussion von Aspekten und Grundvorstellungen	254
5.3.9	Aufgabenbeispiele zu Grundvorstellungen	256
5.3.10	Standards und Kompetenzen zu Grundvorstellungen	260
5.4	Unterrichtliche Zugänge zum Integralbegriff	262
5.4.1	Bestände und Änderungsraten im Anwendungskontext	262
5.4.2	Bestimmung von Flächeninhalten unter Funktionsgraphen	265
5.4.3	Integration als Umkehrung der Differentiation	268
5.4.4	Integrierter Ansatz für Ableitung und Integration	270
5.5	Beispiele zur Integralrechnung	272
5.5.1	Lineare Substitution	272
5.5.2	Rotationskörper	275
5.5.3	Volumenberechnungen	278
5.5.4	Bogenlänge	279
5.5.5	Numerische Verfahren	281
5.6	Aufgaben	283
Literatur		287
Index		297