

Inhaltsverzeichnis

1	Elemente der Finanzmodellierung	1
1.1	Optionen	1
1.1.1	Auszahlungsfunktion	2
1.1.2	Wert und Geometrie der Optionen	5
1.1.3	Parameter und Variable	7
1.1.4	Exotische Optionen	8
1.2	Modell des Finanzmarktes	9
1.2.1	Black-Scholes-Markt	9
1.2.2	Binäres Ein-Perioden-Modell	10
1.3	Numerische Methoden	13
1.3.1	Algorithmen	13
1.3.2	Diskretisierung	14
1.3.3	Effizienz	16
1.4	Binomialbäume	18
1.4.1	Diskretes Modell	18
1.4.2	Berechnung der Parameter und des Baums	21
1.4.3	Bewertung des Baums	23
1.4.4	Konvergenz	26
1.4.5	Griechen	26
1.4.6	Dividenden	27
1.5	Wiener-Prozess	27
1.5.1	Diskretes Modell	29
1.5.2	Stochastisches Integral	30
1.6	Stochastische Differenzialgleichungen	32
1.6.1	Itô-Prozess	32
1.6.2	Geometrische Brownsche Bewegung	33
1.6.3	Risikoneutrale Bewertung	36
1.6.4	Mean Reversion	38
1.6.5	Vektorwertige stochastische Differenzialgleichungen	38

1.7	Itô-Lemma und Anwendungen.....	40
1.7.1	Itô-Lemma	40
1.7.2	Folgerungen für geometrische Brownsche Bewegungen	41
1.7.3	Integraldarstellung.....	44
1.7.4	Anwendung auf Bermuda-Optionen.....	45
1.8	Anmerkungen	46
1.9	Übungen.....	48
2	Berechnung von Zufallszahlen	59
2.1	Gleichverteilte Zufallszahlen.....	60
2.1.1	Linearer Kongruenzgenerator	60
2.1.2	Zufallsvektoren	62
2.1.3	Fibonacci-Generatoren	65
2.2	Zufallsvariable mit anderen Verteilungen	66
2.2.1	Inversion	67
2.2.2	Transformation im $\mathbb{R}^1$	69
2.2.3	Transformation im $\mathbb{R}^n$	71
2.2.4	Verwerfungsmethode.....	71
2.3	Normalverteilte Zufallsvariable	73
2.3.1	Methode von Box und Muller	73
2.3.2	Variante von Marsaglia	74
2.3.3	Ziggurat	75
2.3.4	Korrelierte Zufallsvariable	78
2.4	Monte-Carlo-Integration	80
2.5	Zahlenfolgen mit niedriger Diskrepanz.....	82
2.5.1	Diskrepanz.....	82
2.5.2	Beispiele von Folgen niedriger Diskrepanz	85
2.6	Anmerkungen	87
2.7	Übungen.....	89
3	Monte-Carlo-Simulation	95
3.1	Approximationsfehler	96
3.2	Stochastische Taylor-Entwicklungen	99
3.3	Beispiele numerischer Methoden	102
3.3.1	Positivität	103
3.3.2	Runge-Kutta-Verfahren	104
3.3.3	Taylor-Schema mit schwacher $O(h^2)$ -Konvergenz	105
3.3.4	Höherdimensionale Fälle.....	106
3.4	Zwischenwerte	107
3.5	Monte-Carlo-Simulation bei europäischen Optionen	107
3.5.1	Grundversion	108
3.5.2	Genauigkeit	111
3.5.3	Varianzreduktion	114

3.6	Monte-Carlo-Simulation bei amerikanischen Optionen	118
3.6.1	Stopppzeiten	118
3.6.2	Parametrische Methoden	120
3.6.3	Regressionsmethoden	121
3.7	Anmerkungen	124
3.8	Übungen	126
4	Finite Differenzen für Standardoptionen amerikanischen Typs	131
4.1	Vorbereitungen	132
4.2	Grundlagen von Differenzenverfahren	134
4.2.1	Differenzenapproximationen	134
4.2.2	Das Gitter	135
4.2.3	Explizites Verfahren	137
4.2.4	Stabilität	139
4.2.5	Implizite Methode	142
4.3	Crank-Nicolson-Verfahren	143
4.4	Randbedingungen	147
4.5	Vorzeitiges Ausüben und freie Randwertprobleme	149
4.5.1	Freie Randwertprobleme	149
4.5.2	Ausüben	151
4.5.3	Kontaktbedingung	152
4.5.4	Eigenschaften der Ausübungskurve	153
4.6	Lineare Komplementarität	154
4.6.1	Black-Scholes-Ungleichung	154
4.6.2	Formulierung mit Strafterm	155
4.6.3	Hindernisprobleme	156
4.6.4	Diskretisierung des Hindernisproblems	158
4.6.5	Lineare Komplementarität für amerikanische Put-Optionen	158
4.7	Numerische Realisierung	160
4.7.1	Diskretisierung mit finiten Differenzen	160
4.7.2	Lösbarkeit	162
4.7.3	Numerische Lösung	163
4.8	Genauigkeit	166
4.9	Anmerkungen	169
4.10	Übungen	171
5	Optionen auf zwei Assets und finite Elemente	175
5.1	Zweidimensionale Situation	175
5.1.1	Beispiele für Payoffs	176
5.1.2	Geometrische Brownsche Bewegung	176
5.1.3	Partielle Differenzialgleichungen	177
5.2	Baummethode	178
5.3	Monte-Carlo-Anwendung	183

5.4	Penalty-Methode	185
5.4.1	LCP-Formulierung	186
5.4.2	Formulierung mit Strafterm	187
5.4.3	Diskretisierung	188
5.4.4	Nichtlinearität	190
5.5	Finite Elemente - eine Einführung	191
5.5.1	Beispiel	192
5.5.2	Gewichtete Residuen	193
5.5.3	Ritz-Galerkin-Methoden	194
5.5.4	Beispiel einer Basisfunktion	196
5.5.5	Assembling	197
5.5.6	Spezialfall: Eindimensionale Hutfunktionen	198
5.5.7	Approximationsgüte	198
5.6	Finite Elemente bei Optionen	199
5.6.1	Analytische Vorbereitungen	200
5.6.2	Ritz-Galerkin-Ansatz	200
5.6.3	Randbedingungen	202
5.6.4	Matrizen	205
5.7	Anmerkungen	208
5.8	Übungen	210
Anhänge		215
A1	Finanzderivate und ihr Umfeld	215
A2	Wichtiges aus Wahrscheinlichkeit und Statistik	217
A3	Black-Scholes-Gleichung	220
A4	Methoden der Numerik	222
A5	Stochastisches Integral	227
A6	Nützliche Formeln	229
Literaturverzeichnis		237
Sachverzeichnis		243