

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	1
1.1	Mengen	1
1.1.1	Definition und Schreibweisen	2
1.1.2	Mengenoperationen	6
1.1.3	Potenzmenge und kartesisches Produkt	15
1.1.4	Wichtige Zahlenmengen	18
1.2	Komplexe Zahlen	26
1.2.1	Die imaginäre Einheit i und die Menge der komplexen Zahlen	26
1.2.2	Grundrechenarten für komplexe Zahlen	28
1.2.3	Die gaußsche Zahlenebene und die trigonometrische Form komplexer Zahlen	31
1.2.4	Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen	36
1.3	Relationen	41
1.3.1	Definition und erste Beispiele	41
1.3.2	Äquivalenzrelationen	44
1.4	Vollständige Induktion	50
1.4.1	Summenformeln	52
1.4.2	Rekursionsformeln	57
1.4.3	Ungleichungen	61
2	Lineare Gleichungssysteme, Vektoren und Matrizen	65
2.1	Lineare Gleichungssysteme	66
2.1.1	Einführende Beispiele	66
2.1.2	Der Gauß-Algorithmus	69
2.1.3	Textaufgaben zu linearen Gleichungssystemen	81
2.2	Vektoren	83
2.3	Matrizen	91
2.3.1	Addition und Multiplikation von Matrizen	92
2.3.2	Symmetrische Matrizen	99
2.3.3	Invertierung von Matrizen	101
2.4	Determinanten	110

2.4.1	Definition der Determinante und der Entwicklungssatz	110
2.4.2	Eigenschaften der Determinante	116
2.4.3	Definite Matrizen	120
2.4.4	Invertierbarkeit von Matrizen	123
2.4.5	Prüfung auf lineare Unabhängigkeit	125
2.4.6	Die cramersche Regel	126
3	Analytische Geometrie	131
3.1	Vektoren im dreidimensionalen Raum und Vektorprodukte	131
3.2	Geraden und Ebenen im Raum	139
3.2.1	Darstellungsformen für Geraden und Ebenen	139
3.2.2	Schnittpunkte und Schnittgeraden	147
4	Lineare Optimierung	161
4.1	Ein erstes Beispiel	161
4.2	Lineare Optimierung mit zwei Variablen	162
4.2.1	Grafische Lösung	165
4.2.2	Rechnerische Lösung durch Eckpunktberechnung	173
4.2.3	Der Simplex-Algorithmus	176
4.3	Lineare Optimierung mit beliebig vielen Variablen	185
4.3.1	Problemstellung und allgemeine Vorbemerkungen	185
4.3.2	Der Simplex-Algorithmus	187
4.3.3	Modifikationen des Simplex-Algorithmus	196
5	Folgen und Funktionen	197
5.1	Folgen	197
5.1.1	Beschränktheit und Monotonie	199
5.1.2	Konvergente Folgen und Grenzwerte	203
5.2	Funktionen	212
5.2.1	Grundbegriffe	212
5.2.2	Verkettung, Umkehrbarkeit und Monotonie	223
5.2.3	Stetigkeit	235
5.3	Wichtige Funktionenklassen	247
5.3.1	Potenz- und Wurzelfunktionen	247
5.3.2	Polynome und rationale Funktionen	250
5.3.3	Trigonometrische Funktionen	256
5.3.4	Exponential- und Logarithmusfunktionen	260
6	Differenzialrechnung	267
6.1	Differenzierbarkeit	268
6.1.1	Definition und erste Beispiele	268
6.1.2	Ableitungen einiger elementarer Funktionen	271
6.1.3	Nicht differenzierbare Funktionen	275

6.1.4	Tangente	278
6.2	Ableitungsregeln	280
6.2.1	Linearität	280
6.2.2	Produktregel	281
6.2.3	Quotientenregel	283
6.2.4	Kettenregel	286
6.2.5	Ableitung der Umkehrfunktion	289
6.2.6	Wichtige Ableitungen	292
6.3	Anwendungen der Differenzialrechnung	293
6.3.1	Monotoniekriterien für differenzierbare Funktionen	293
6.3.2	Extremstellen und Extremwerte	297
6.3.3	Wendestellen und Sattelpunkte	305
6.3.4	Die l'hopitalsche Regel	307
7	Integralrechnung	311
7.1	Integration von Funktionen	311
7.1.1	Definition des Integrals	311
7.1.2	Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	317
7.1.3	Stammfunktionen einiger wichtiger Funktionen	323
7.2	Integrationsregeln	324
7.2.1	Linearität	324
7.2.2	Partielle Integration	325
7.2.3	Substitutionsregel	328
7.2.4	Partialbruchzerlegung	333
7.3	Anwendungen	341
7.3.1	Uneigentliche Integrale	341
7.3.2	Bogenlänge	345
7.3.3	Volumen von Rotationskörpern	347
8	Reihen	351
8.1	Zahlenreihen	352
8.1.1	Definition und grundlegende Eigenschaften	354
8.1.2	Konvergenzkriterien für Reihen	356
8.1.3	Absolute Konvergenz	363
8.2	Potenzreihen	367
8.2.1	Definition und erste Beispiele	368
8.2.2	Konvergenzradius und Konvergenzbereich	369
8.2.3	Operationen mit Potenzreihen	374
8.3	Taylor-Reihen und Taylor-Polynome	379
8.4	Fourier-Reihen	385
8.4.1	Periodische Funktionen	385
8.4.2	Fourier-Reihendarstellung periodischer Funktionen	388

8.4.3	Komplexe Darstellung der Fourier-Reihe	397
9	Differenzialgleichungen	401
9.1	Vorbemerkungen und einleitende Beispiele	401
9.2	Definitionen; Existenz und Eindeutigkeit der Lösung	405
9.3	Lösungsverfahren für spezielle Typen von Differenzialgleichungen	411
9.3.1	Trennung der Variablen	411
9.3.2	Variation der Konstanten	414
9.3.3	Substitution	418
9.4	Lineare Differenzialgleichungen	421
9.4.1	Struktur der Lösungsmenge einer linearen Differenzialgleichung	422
9.4.2	Lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten: homogener Fall	428
9.4.3	Lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten: inhomogener Fall	439
9.5	Laplace-Transformation	443
10	Differenzialrechnung für Funktionen von mehreren Variablen	453
10.1	Grundlegende Begriffe	454
10.2	Partielle und totale Ableitung	463
10.2.1	Partielle Ableitung	463
10.2.2	Totale Ableitung	472
10.3	Extremwertberechnung	475
10.3.1	Extrema ohne Nebenbedingungen	476
10.3.2	Extrema mit Nebenbedingungen	483
11	Stochastik	489
11.1	Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik	489
11.1.1	Grundlagen	489
11.1.2	Kombinatorik	491
11.1.3	Verknüpfungen von Ereignissen	498
11.1.4	Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit	501
11.1.5	Bedingte Wahrscheinlichkeit und unabhängige Ereignisse	506
11.2	Zufallsgrößen und Verteilungen	511
11.2.1	Diskrete Verteilungen	515
11.2.2	Stetige Verteilungen	525
11.3	Einblicke in die mathematische Statistik	535
11.3.1	Deskriptive Statistik	535
11.3.2	Induktive Statistik	539
12	Numerische Mathematik	547
12.1	Fixpunkte und Nullstellen	548

12.1.1	Definitionen und erste Beispiele	548
12.1.2	Berechnung von Fixpunkten: Der Fixpunktsatz von Banach . .	549
12.1.3	Das Newton-Verfahren	554
12.2	Lineare Gleichungssysteme	560
12.2.1	Allgemeines	560
12.2.2	Das Gesamtschrittverfahren	562
12.2.3	Das Einzelschrittverfahren	572
12.3	Interpolation	575
12.3.1	Problemstellung und Lösung durch Lagrange-Polynome . . .	575
12.3.2	Dividierte Differenzen und die newtonsche Form des Interpolationspolynoms	582
12.4	Numerische Integration	588
12.4.1	Die Trapezregel	588
12.4.2	Die Simpson-Regel	594
13	Lösungen der Übungsaufgaben	603
13.1	Kapitel 1	603
13.2	Kapitel 2	608
13.3	Kapitel 3	613
13.4	Kapitel 4	615
13.5	Kapitel 5	620
13.6	Kapitel 6	624
13.7	Kapitel 7	630
13.8	Kapitel 8	635
13.9	Kapitel 9	643
13.10	Kapitel 10	649
13.11	Kapitel 11	653
13.12	Kapitel 12	658
	Literatur	669
	Register	671