

Inhaltsverzeichnis

Historische Einführung	1
0. Komplexe Zahlen und stetige Funktionen	7
0.1 Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen	7
0.1.1 Der Körper $\mathbb{C}$	7
0.1.2 Absoluter Betrag und Polarkoordinaten	9
0.1.3 $\mathbb{R}$ -lineare und $\mathbb{C}$ -lineare Abbildungen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$	11
0.1.4 Skalarprodukt	12
0.1.5 Winkeltreue Abbildungen	13
0.2 Topologische Grundbegriffe	15
0.2.1 Metrische Räume	15
0.2.2 Offene und abgeschlossene Mengen	17
0.2.3 Konvergente Folgen. Häufungspunkte	17
0.2.4 Historisches zum Konvergenzbegriff	18
0.2.5 Kompakte Mengen	19
0.3 Konvergente Folgen komplexer Zahlen	20
0.3.1 Rechenregeln	20
0.3.2 Cauchysches Konvergenzkriterium. Charakterisierung kompakter Mengen in $\mathbb{C}$	22
0.4 Konvergente und absolut konvergente Reihen	23
0.4.1 Konvergente Reihen komplexer Zahlen	23
0.4.2 Absolut konvergente Reihen. Majorantenkriterium ...	25
0.4.3 Umordnungssatz	26
0.4.4 Historisches zur absoluten Konvergenz	26
0.4.5 Bemerkungen zum Riemannschen Umordnungssatz ...	27
0.4.6 Reihenproduktsatz	28
0.5 Stetige Funktionen	29
0.5.1 Stetigkeitsbegriff	30
0.5.2 Die $\mathbb{C}$ -Algebra $\mathcal{C}(X)$	31
0.5.3 Historisches zum Funktionsbegriff	32
0.5.4 Historisches zum Stetigkeitsbegriff	33
0.6 Zusammenhängende Räume. Gebiete in $\mathbb{C}$	34
0.6.1 Lokal-konstante Funktionen. Zusammenhangsbegriff ..	35
0.6.2 Wege und Wegzusammenhang	35

0.6.3	Gebiete in $\mathbb{C}$	36
0.6.4	Zusammenhangskomponenten von Bereichen	38
0.6.5	Rand und Randabstand	38
1.	Komplexe Differentialrechnung	41
1.1	Komplex differenzierbare Funktionen	42
1.1.1	Komplexe Differenzierbarkeit	43
1.1.2	Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen	44
1.1.3	Historisches zu den Cauchy-Riemannschen Differenti- algleichungen	45
1.2	Komplexe und reelle Differenzierbarkeit	46
1.2.1	Charakterisierung komplex differenzierbarer Funktionen	46
1.2.2	Ein hinreichendes Kriterium für komplexe Differen- zierbarkeit	47
1.2.3	Beispiele zu den Cauchy-Riemannschen Gleichungen ..	48
1.2.4	* Harmonische Funktionen	49
1.3	Holomorphe Funktionen	51
1.3.1	Differentiationsregeln	52
1.3.2	Die $\mathbb{C}$ -Algebra $\mathcal{O}(D)$	54
1.3.3	Charakterisierung lokal-konstanter Funktionen	55
1.3.4	Historisches zur Notation	56
1.4	Partielle Differentiation nach x, y, z und $\bar{z}$	57
1.4.1	Die partiellen Ableitungen $f_x, f_y, f_z, f_{\bar{z}}$	58
1.4.2	Beziehungen zwischen den Ableitungen $u_x, u_y, v_x, v_y,$ $f_x, f_y, f_z, f_{\bar{z}}$	59
1.4.3	Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$	60
1.4.4	Kalkül der Differentialoperatoren $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$	60
2.	Holomorphie und Winkeltreue. Biholomorphe Abbildungen	65
2.1	Holomorphe Funktionen und Winkeltreue	66
2.1.1	Winkeltreue, Holomorphie und Antiholomorphie	66
2.1.2	Winkel- und Orientierungstreue, Holomorphie	67
2.1.3	Geometrische Deutung der Winkeltreue	68
2.1.4	Zwei Beispiele	69
2.1.5	Historisches zur Winkeltreue	71
2.2	Biholomorphe Abbildungen	72
2.2.1	Komplexe 2×2 Matrizen und biholomorphe Abbildungen	73
2.2.2	Die biholomorphe Cayleyabbildung $\mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}, z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$..	74
2.2.3	* Bijektive holomorphe Abbildungen von $\mathbb{H}$ und von $\mathbb{E}$ auf die geschlitzte Ebene	75
2.3	Automorphismen der oberen Halbebene und des Einheitskreises	76
2.3.1	Automorphismen von $\mathbb{H}$	77
2.3.2	Automorphismen von $\mathbb{E}$	78
2.3.3	Die Schreibweise $\eta_{\frac{z-w}{\bar{w}z-1}}$ für Automorphismen von $\mathbb{E}$..	79
2.3.4	Homogenität von $\mathbb{E}$ und $\mathbb{H}$	79

3. Konvergenzbegriffe der Funktionentheorie	81
3.1 Gleichmäßige, lokal-gleichmäßige und kompakte Konvergenz .	83
3.1.1 Gleichmäßige Konvergenz	83
3.1.2 Lokal-gleichmäßige Konvergenz	84
3.1.3 Kompakte Konvergenz	85
3.1.4 Historisches zur gleichmäßigen Konvergenz	86
3.1.5 * Kompakte und stetige Konvergenz.	87
3.2 Konvergenzkriterien	90
3.2.1 Weierstraßsches Majorantenkriterium	91
3.3 Normal konvergente Reihen	92
3.3.1 Normale Konvergenz	92
3.3.2 Diskussion der normalen Konvergenz	93
3.3.3 Historisches zur normalen Konvergenz	94
4. Potenzreihen	97
4.1 Konvergenzkriterien	98
4.1.1 Abelsches Konvergenzlemma	98
4.1.2 Konvergenzradius	99
4.1.3 Formel von Cauchy-Hadamard	99
4.1.4 Quotientenkriterium	100
4.1.5 Historisches zu konvergenten Potenzreihen	101
4.2 Beispiele konvergenter Potenzreihen	103
4.2.1 Exponentialreihe und trigonometrische Reihen. Euler-	
sche Formel	103
4.2.2 Logarithmische Reihe und Arcustangensreihe	104
4.2.3 Binomische Reihe	105
4.2.4 * Konvergenzverhalten auf dem Rand	106
4.2.5 * Abelscher Stetigkeitssatz	107
4.3 Holomorphie von Potenzreihen	109
4.3.1 Formale gliedweise Differentiation und Integration	109
4.3.2 Holomorphie von Potenzreihen. Vertauschungssatz	110
4.3.3 Historisches zur gliedweisen Differentiation von Reihen	111
4.3.4 Beispiele holomorpher Funktionen	111
4.4 Struktur der Algebra der konvergenten Potenzreihen	113
4.4.1 Ordnungsfunktion	114
4.4.2 Einheitensatz	114
4.4.3 Normalform konvergenter Potenzreihen	115
4.4.4 Bestimmung aller Ideale	116
5. Elementar-transzendente Funktionen	119
5.1 Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen	120
5.1.1 Charakterisierung von $\exp z$ durch die Differentialglei-	
chung	120
5.1.2 Additionstheorem der Exponentialfunktion	121
5.1.3 Bemerkungen zum Additionstheorem	122

5.1.4	Additionstheorem für $\cos z$ und $\sin z$	123
5.1.5	Historisches zu $\cos z$ und $\sin z$	124
5.1.6	Hyperbolische Funktionen	124
5.2	Epimorphiesatz für $\exp z$ und Folgerungen	125
5.2.1	Epimorphiesatz	126
5.2.2	Die Gleichung $\text{Kern}(\exp) = 2\pi i\mathbb{Z}$	127
5.2.3	Periodizität von $\exp z$	128
5.2.4	Wertevorrat, Nullstellen und Periodizität von $\cos z$ und $\sin z$	129
5.2.5	Cotangens- und Tangensfunktion. Arcustangensreihe ..	130
5.2.6	Die Gleichung $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$	131
5.3	Polarkoordinaten, Einheitswurzeln und natürliche Grenzen ..	132
5.3.1	Polarkoordinaten	133
5.3.2	Bogenmaß und Argument	134
5.3.3	Einheitswurzeln	135
5.3.4	Singuläre Punkte und natürliche Grenzen	135
5.3.5	Historisches zu natürlichen Grenzen	137
5.4	Logarithmusfunktionen	138
5.4.1	Definition und elementare Eigenschaften	138
5.4.2	Existenz von Logarithmusfunktionen	139
5.4.3	Die Eulersche Folge $(1 + z/n)^n$	140
5.4.4	Hauptzweig des Logarithmus	141
5.4.5	Historisches zur Logarithmusfunktion im Komplexen ..	142
5.5	Diskussion von Logarithmusfunktionen	143
5.5.1	Zu den Identitäten $\log(wz) = \log w + \log z$ und $\log(\exp z) = z$	143
5.5.2	Logarithmus und Arcustangens	145
5.5.3	Potenzfunktionen. Formel von Newton-Abel	145
5.5.4	Die Riemannsche ζ -Funktion	147
6.	Komplexe Integralrechnung	149
6.1	Integration in reellen Intervallen	150
6.1.1	Integralbegriff. Rechenregeln und Standardabschätzung	150
6.1.2	Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung	151
6.2	Wegintegrale in $\mathbb{C}$	153
6.2.1	Stetig und stückweise stetig differenzierbare Wege	153
6.2.2	Integration langs Wegen	154
6.2.3	Die Integrale $\int_{\partial B} (\zeta - c)^n d\zeta$	155
6.2.4	Historisches zur Integration im Komplexen	157
6.2.5	Unabhängigkeit von der Parametrisierung	157
6.2.6	Zusammenhang mit reellen Kurvenintegralen	158
6.3	Eigenschaften komplexer Wegintegrale	159
6.3.1	Standardabschätzung	161

6.3.2	Vertauschungssätze	162
6.3.3	Das Integral $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$, $B = B_r(c)$	163
6.4	Wegunabhängigkeit von Integralen, Stammfunktionen	165
6.4.1	Stammfunktionen	165
6.4.2	Bemerkungen über Stammfunktionen, Integrabilitätskriterium	166
6.4.3	Integrabilitätskriterium für Sterngebiete	168
7.	Integralsatz, Integralformel und Potenzreihenentwicklung.	171
7.1	Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete	171
7.1.1	Integrallemma von Goursat	171
7.1.2	Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete	173
7.1.3	Historisches zum Integralsatz	174
7.1.4	Historisches zum Integrallemma	176
7.1.5	* Reeller Beweis des Integrallemmas	177
7.1.6	* Die Fresnelschen Integrale	178
7.1.7	* Das Integral $I(z) := \int_0^\infty t^{-1}(e^{-t} - e^{-tz})dt$	179
7.2	Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben	180
7.2.1	Zentrierungslemma	180
7.2.2	Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben	182
7.2.3	Historisches zur Integralformel	184
7.2.4	* Die Cauchysche Integralformel für reell stetig differenzierbare Funktionen	184
7.2.5	* Schwarzsche Integralformel	185
7.3	Entwicklung holomorpher Funktionen in Potenzreihen	187
7.3.1	Entwicklungslemma	187
7.3.2	Entwicklungssatz von Cauchy-Taylor	189
7.3.3	Historisches zum Entwicklungssatz	190
7.3.4	Lokal endliche Mengen. Riemannscher Fortsetzungssatz	191
7.3.5	Historisches zum Riemannschen Fortsetzungssatz	191
7.4	Diskussion des Entwicklungssatzes	193
7.4.1	Holomorphie und unendlich häufige komplexe Differenzierbarkeit	193
7.4.2	Umbildungssatz	194
7.4.3	Analytische Fortsetzung	194
7.4.4	Produktsatz für Potenzreihen	195
7.4.5	Bestimmung von Konvergenzradien	196
7.5	* Spezielle Taylorreihen. Bernoullische Zahlen	197
7.5.1	Taylorreihe von $z(e^z - 1)^{-1}$. Bernoullische Zahlen	198
7.5.2	Taylorreihen von $z \cot z$, $\tan z$ und $\frac{z}{\sin z}$	199
7.5.3	Potenzsummen und Bernoullische Zahlen	199
7.5.4	Bernoullische Polynome	201

8. Fundamentalsätze über holomorphe Funktionen	203
8.1 Identitätssatz	203
8.1.1 Historisches zum Identitätssatz	206
8.1.2 Lokale Endlichkeit der a -Stellen	207
8.1.3 Nullstellenordnung und Vielfachheit	207
8.1.4 Existenz singulärer Punkte	209
8.2 Der Holomorphiebegriff	211
8.2.1 Holomorphie, lokale Integrabilität und konvergente Potenzreihen	211
8.2.2 Holomorphie von Integralen	212
8.2.3 Holomorphie, Winkel- und Orientierungstreue (endgültige Fassung)	213
8.2.4 Cauchyscher, Riemannscher und Weierstraßscher Standpunkt. Das Glaubensbekenntnis von Weierstraß	213
8.3 Cauchysche Abschätzungen und Ungleichungen für Taylorkoeffizienten	215
8.3.1 Cauchysche Abschätzung	215
8.3.2 Gutzmersche Formel. Maximumprinzip	216
8.3.3 Ganze Funktionen. Satz von Liouville	218
8.3.4 Historisches zu den Cauchyschen Ungleichungen und zum Satz von Liouville	220
8.3.5 * Beweis der Cauchyschen Ungleichungen nach Weierstraß	220
8.4 Konvergenzsätze von Weierstraß	222
8.4.1 Weierstraßscher Konvergenzsatz	222
8.4.2 Differentiationssätze für kompakt konvergente Reihen	222
8.4.3 Historisches zu den Konvergenzsätzen	224
8.4.4 * Weitere Konvergenzsätze	225
8.4.5 * Eine Bemerkung Weierstraß' zur Holomorphie	226
8.4.6 * Eine Konstruktion von Weierstraß	227
8.5 Offenheitssatz und Maximumprinzip	228
8.5.1 Offenheitssatz	229
8.5.2 Maximumprinzip	230
8.5.3 Historisches zum Maximumprinzip	231
8.5.4 Verschärfung des Weierstraßschen Konvergenzsatzes	232
8.5.5 Satz von Hurwitz	232
9. Miscellanea	235
9.1 Fundamentalsatz der Algebra	235
9.1.1 Fundamentalsatz der Algebra	235
9.1.2 Vier Beweise des Fundamentalsatzes	237
9.1.3 Satz von Gauß über die Lage der Nullstellen von Ableitungen	237
9.2 Schwarzsches Lemma und die Gruppen $\text{Aut } \mathbb{E}$, $\text{Aut } \mathbb{H}$	239
9.2.1 Schwarzsches Lemma	239

9.2.2	Mittelpunktstreue Automorphismen von $\mathbb{E}$. Die Gruppen $\text{Aut } \mathbb{E}$ und $\text{Aut } \mathbb{H}$	239
9.2.3	Fixpunkte von Automorphismen	241
9.2.4	Historisches zum Schwarzschen Lemma	241
9.2.5	Lemma von Schwarz-Pick	242
9.2.6	Satz von Study	243
9.2.7	Schwarzsches Lemma und Abschätzung der ersten Ableitung	244
9.3	Holomorphe Logarithmen und holomorphe Wurzeln	245
9.3.1	Logarithmische Ableitung. Existenzlemma	246
9.3.2	Homologisch einfach zusammenhängende Bereiche. Existenz holomorpher Logarithmusfunktionen	247
9.3.3	Holomorphe Wurzelfunktionen	247
9.3.4	Die Gleichung $f(z) = f(c) \exp \int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta$	248
9.3.5	Die Kraft der Quadratwurzel	249
9.4	Biholomorphe Abbildungen. Lokale Normalform	250
9.4.1	Biholomorphiekriterium	250
9.4.2	Lokale Injektivität und lokal-biholomorphe Abbildungen	251
9.4.3	Lokale Normalform	253
9.4.4	Geometrische Interpretation der lokalen Normalform ..	253
9.4.5	Faktorisierung holomorpher Funktionen	254
9.5	Allgemeine Cauchy-Theorie	255
9.5.1	Die Indexfunktion $\text{ind}_{\gamma}(z)$	256
9.5.2	Hauptsatz der Cauchyschen Funktionentheorie	257
9.5.3	Beweis von iii) $\Rightarrow$ ii) nach Dixon	258
9.5.4	Nullhomologie. Charakterisierung homologisch einfach zusammenhängender Bereiche	260
9.6	* Asymptotische Potenzreihenentwicklungen	261
9.6.1	Definition und elementare Eigenschaften	262
9.6.2	Eine hinreichende Bedingung für die Existenz asymptotischer Entwicklungen	263
9.6.3	Asymptotische Entwicklungen und Differentiation	264
9.6.4	Satz von Ritt	265
9.6.5	Satz von Borel	268
10.	Isolierte Singularitäten. Meromorphe Funktionen	271
10.1	Isolierte Singularitäten	271
10.1.1	Hebbare Singularitäten. Pole	272
10.1.2	Entwicklung von Funktionen um Polstellen	273
10.1.3	Wesentliche Singularitäten. Satz von Casorati-Weierstraß	274
10.1.4	Historisches zur Charakterisierung isolierter Singularitäten	276

10.2	* Automorphismen punktierter Bereiche	277
10.2.1	Isolierte Singularitäten holomorpher Injektionen	277
10.2.2	Die Gruppen $\text{Aut } \mathbb{C}$ und $\text{Aut}(\mathbb{C}^\times)$	278
10.2.3	Automorphismen punktierter beschränkter Bereiche	279
10.2.4	Starre Gebiete	280
10.3	Meromorphe Funktionen	281
10.3.1	Definition der Meromorphie	282
10.3.2	Die $\mathbb{C}$ -Algebra $\mathcal{M}(D)$ der in D meromorphen Funktionen	283
10.3.3	Division von meromorphen Funktionen	284
10.3.4	Die Ordnungsfunktion o_c	286
11.	Konvergente Reihen meromorpher Funktionen	287
11.1	Allgemeine Konvergenztheorie	287
11.1.1	Kompakte und normale Konvergenz	288
11.1.2	Rechenregeln	289
11.1.3	Beispiele	290
11.2	Die Partialbruchentwicklung von $\pi \cot \pi z$	291
11.2.1	Cotangens und Verdopplungsformel. Die Identität $\pi \cot \pi z = \varepsilon_1(z)$	291
11.2.2	Historisches zur Cotangensreihe und zu ihrem Beweis	293
11.2.3	Partialbruchreihen für $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ und $\frac{\pi}{\sin \pi z}$	294
11.2.4	* Charakterisierung des Cotangens durch sein Additionstheorem bzw. seine Differentialgleichung	295
11.3	Die Eulerschen Formeln für $\sum_{\nu \geq 1} \frac{1}{\nu^{2n}}$	296
11.3.1	Entwicklung von $\varepsilon_1(z)$ um 0 und Eulersche Formeln für $\zeta(2n)$	296
11.3.2	Historisches zu den Eulerschen $\zeta(2n)$ -Formeln	297
11.3.3	Differentialgleichung für ε_1 und eine Identität für Bernoullische Zahlen	298
11.3.4	Die Eisensteinreihen $\varepsilon_k(z) := \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+\nu)^k}$	299
11.4	* Eisenstein-Theorie trigonometrischer Funktionen	300
11.4.1	Additionstheorem	301
11.4.2	Eisensteins Grundformeln	301
11.4.3	Weitere Eisensteinsche Formeln und die Identität $\varepsilon_1(z) = \pi \cot \pi z$	303
11.4.4	Skizze der Theorie der Kreisfunktionen nach Eisenstein	304
12.	Laurentreihen und Fourierreihen	307
12.1	Holomorphe Funktionen in Kreisingen und Laurentreihen	307
12.1.1	Cauchytheorie für Kreisinge	308
12.1.2	Laurentdarstellung in Kreisingen	310
12.1.3	Laurententwicklungen	311
12.1.4	Beispiele	313
12.1.5	Historisches zum Satz von Laurent	314

12.1.6	* Herleitung des Satzes von Laurent aus dem Satz von Cauchy-Taylor	315
12.2	Eigenschaften von Laurentreihen	319
12.2.1	Konvergenzsatz und Identitätssatz	319
12.2.2	Gutzmersche Formel und Cauchysche Ungleichungen ..	321
12.2.3	Charakterisierung isolierter Singularitäten	321
12.3	Periodische holomorphe Funktionen und Fourierreihen	323
12.3.1	Streifengebiete und Kreistränge	323
12.3.2	Periodische holomorphe Funktionen in Streifengebieten	324
12.3.3	Fourierentwicklung in Streifengebieten	325
12.3.4	Beispiele	326
12.3.5	Historisches zu Fourierreihen	327
12.4	Die Thetafunktion	327
12.4.1	Konvergenzsatz	328
12.4.2	Konstruktion doppelt-periodischer Funktionen	329
12.4.3	Die Fourierreihe von $e^{-z^2\pi\tau}\vartheta(i\tau z, \tau)$	330
12.4.4	Transformationsformel der Thetafunktion	332
12.4.5	Historisches zur Thetafunktion	333
12.4.6	Über das Fehlerintegral	334
13.	Residuenkalkül	339
13.1	Residuensatz	339
13.1.1	Einfach geschlossene Wege	339
13.1.2	Das Residuum	342
13.1.3	Beispiele	344
13.1.4	Residuensatz	346
13.1.5	Historisches zum Residuensatz	347
13.2	Folgerungen aus dem Residuensatz	348
13.2.1	Das Integral $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(\zeta) \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-a} d\zeta$	348
13.2.2	Anzahlformel für Null- und Polstellen	349
13.2.3	Satz von Rouché	350
14.	Bestimmte Integrale und Residuenkalkül	355
14.1	Berechnung von Integralen	355
14.1.1	Uneigentliche Integrale	355
14.1.2	Trigonometrische Integrale $\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$	357
14.1.3	Uneigentliche Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$	358
14.1.4	Das Integral $\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx$ für $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < m < n$	359
14.2	Weitere Integralauswertungen	361
14.2.1	Uneigentliche Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{iax} dx$	361
14.2.2	Uneigentliche Integrale $\int_0^{\infty} q(x) x^{a-1} dx$	363
14.2.3	Die Integrale $\int_0^{\infty} \frac{\sin^n x}{x^n} dx$	366
14.3	Gaußsche Summen	368
14.3.1	Abschätzung von $\frac{e^{uz}}{e^z-1}$ für $0 \leq u \leq 1$	369

14.3.2 Berechnung der Gaußschen Summen $G_n := \sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i}{n}\nu^2}$,
 $n \geq 1$ 370

14.3.3 Direkter residuentheoretischer Beweis der Formel
 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ 372

14.3.4 Fourierreihen der Bernoullischen Polynome 373

**Kurzbiographien von Abel, Cauchy, Eisenstein, Euler, Riemann
und Weierstraß 375**

Literatur 381

Namensverzeichnis 391

Symbolverzeichnis 395

Sachverzeichnis 397