

---

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>Vorworte</b>	<b>xiii</b>
<b>I Einführung</b>	<b>1</b>
I.1 Ein paar Beispiele . . . . .	1
I.2 Interpretation von Schaubildern . . . . .	3
I.3 Mathematische Beschreibung von Abhängigkeiten . . . . .	7
I.4 Der Begriff der Funktion . . . . .	7
I.5 Einteilung des Zahlenstrahls – Intervalle . . . . .	10
<b>II Lineare Funktionen</b>	<b>13</b>
II.1 Die Streckenlänge im kartesischen Koordinatensystem . . . . .	13
II.2 Der Mittelpunkt einer Strecke im kartesischen Koordinatensystem . . . . .	15
II.3 Die Hauptform der Geradengleichung . . . . .	16
II.4 Die gegenseitige Lage von Geraden . . . . .	23
II.5 Über Schnittwinkel und orthogonale Geraden . . . . .	25
II.5.1 Eine neue Möglichkeit, die Steigung zu berechnen . . . . .	25
II.5.2 Zueinander orthogonale Geraden . . . . .	27
II.5.3 Der Schnittwinkel zweier Geraden . . . . .	30
<b>III Quadratische Funktionen</b>	<b>35</b>
III.1 Die Binomischen Formeln . . . . .	35
III.1.1 Die 1. Binomische Formel . . . . .	35
III.1.2 Die 2. Binomische Formel . . . . .	36
III.1.3 Die 3. Binomische Formel . . . . .	37
III.1.4 Der Weg zurück – Die Binomischen Formeln im Rückwärtsgang . . . . .	37
III.2 Der Umgang mit quadratischen Funktionen . . . . .	39
III.2.1 Die Mitternachtsformel (MNF) . . . . .	39
III.2.2 Von der Scheitelform zur Normalform und wieder zurück – There and back again . . . . .	42
III.2.3 Scheitelermittlung durch „Absenken“ . . . . .	46
III.3 Die Herleitung der Mitternachtsformel . . . . .	49
III.4 Der Umgang mit Parabelscharen – Grundlagen Parameterfunktionen . . . . .	52
III.5 Zusammenfassung des Unterkapitels über Parameterfunktionen . . . . .	65

<b>IV</b>	<b>Grundlagen Potenzfunktionen</b>	<b>67</b>
IV.1	Potenzfunktionen – Definition und ein paar Eigenschaften . . . . .	67
IV.1.1	Parabeln n-ter Ordnung . . . . .	67
IV.1.2	Hyperbeln n-ter Ordnung . . . . .	69
IV.2	Die Potenzgesetze . . . . .	71
IV.2.1	Warum Hochzahlen praktisch sind . . . . .	72
IV.2.2	Das „nullte“ Potenzgesetz und noch eine Definition . . . . .	73
IV.2.3	Das erste Potenzgesetz . . . . .	74
IV.2.4	Das zweite Potenzgesetz . . . . .	74
IV.2.5	Das dritte Potenzgesetz . . . . .	75
IV.2.6	Das vierte Potenzgesetz . . . . .	75
IV.2.7	Das fünfte Potenzgesetz . . . . .	76
IV.2.8	Rationale Hochzahlen . . . . .	76
IV.2.9	Rechnen ohne Klammern – Vorfahrtsregeln beim Rechnen . . . . .	78
IV.3	Rechnen mit Wurzeln – Einfache Wurzelgleichungen . . . . .	79
IV.4	Die Logarithmengesetze . . . . .	83
<b>V</b>	<b>Ganzrationale Funktionen – Eine Einführung</b>	<b>91</b>
V.1	Definition und Grenzverhalten . . . . .	91
V.2	Zur Symmetrie bei ganzrationalen Funktionen . . . . .	95
V.3	Noch mehr Symmetrie – Symmetrie zu beliebigen Achsen und Punkten .	96
V.4	Ganzrationale Funktionen und ihre Nullstellen . . . . .	99
V.4.1	Warum die Polynomdivision funktioniert . . . . .	99
V.4.2	Das Horner-Schema . . . . .	101
V.4.3	Nullstellen und Substitution bei ganzrationalen Funktionen . . . . .	105
V.5	Das Baukastenprinzip – Zusammengesetzte Funktionen . . . . .	106
V.5.1	Addition und Subtraktion von Funktionen . . . . .	106
V.5.2	Multiplikation und Division von Funktionen . . . . .	109
V.6	Den Überblick behalten – Gebietseinteilungen vornehmen . . . . .	112
V.7	Beträge von Zahlen/Funktionen und Betragsgleichungen . . . . .	113
V.7.1	Vom Betrag einer Zahl und den dazugehörigen Rechenregeln . . . . .	113
V.7.2	Der Betrag einer Funktion oder Ebbe in den Quadranten Nummer III und IV . . . . .	116
V.7.3	Die abschnittsweise definierte Funktion in Gleichungen – Jetzt wird's kritisch!	121
V.7.4	Betragsgleichungen . . . . .	123
<b>VI</b>	<b>Die vollständige Induktion und (ihre) Folgen</b>	<b>131</b>
VI.1	Grundlagen . . . . .	131
VI.1.1	Ein paar Spielregeln zu Beginn . . . . .	131
VI.1.2	Darstellungsformen von Folgen . . . . .	132
VI.1.3	Die Definition der Monotonie . . . . .	133
VI.1.4	Der Nachweis der Monotonie . . . . .	134
VI.1.5	Beschränktheit . . . . .	134

VI.2	Der Grenzwert einer Folge . . . . .	136
VI.2.1	Die Definition des Grenzwertes . . . . .	136
VI.2.2	Zwei Sätze und ein paar Begriffe . . . . .	137
VI.3	Die Grenzwertsätze . . . . .	138
VI.3.1	Die 3 Grenzwertsätze . . . . .	138
VI.3.2	Ein Beweis zu den Grenzwertsätzen . . . . .	139
VI.3.3	Berechnung der Grenzwerte bei rekursiven Folgen . . . . .	140
VI.4	Arithmetische und geometrische Folgen . . . . .	141
VI.4.1	Arithmetische Folgen I – Ein paar Grundlagen . . . . .	141
VI.4.2	Geometrische Folgen I – Ein paar Grundlagen . . . . .	142
VI.5	Die vollständige Induktion – Ein mächtiges Beweisverfahren . . . . .	144
VI.5.1	Arithmetische Folgen II – Die Summe der Folgenglieder . . . . .	147
VI.5.2	Geometrische Folgen II – Die Summe der Folgenglieder . . . . .	149
VI.5.3	Vollständige Induktion in Beispielen . . . . .	150
VI.6	Ein Test alles Gelernten – Die Fibonacci-Zahlenfolge . . . . .	156
VI.6.1	Einführung und historischer Abriss . . . . .	157
VI.6.2	Die Fibonacci-Zahlenfolge – Grundlagen . . . . .	158
VI.6.3	Die Kaninchen-Aufgabe . . . . .	161
VI.6.4	Der Goldene Schnitt . . . . .	163
VI.6.5	Die Herleitung der expliziten Formel . . . . .	164
<b>VII</b>	<b>Einführung in die Differentialrechnung</b>	<b>169</b>
VII.1	Vom Differenzen- zum Differentialquotienten . . . . .	169
VII.2	Die Ableitung einer Potenzfunktion und die Tangentengleichung . . . . .	173
VII.2.1	Der Umgang mit Berührungspunkten . . . . .	178
VII.3	Die Herleitungen der Ableitungsregeln . . . . .	179
VII.3.1	Die Summenregel . . . . .	180
VII.3.2	Die Faktorregel . . . . .	182
VII.3.3	Die Produktregel . . . . .	183
VII.3.4	Die Quotientenregel . . . . .	185
VII.3.5	Die Kettenregel . . . . .	188
VII.4	Wichtige Punkte eines Funktionsgraphen . . . . .	190
VII.4.1	Extrempunkte . . . . .	191
VII.4.2	Wendepunkte . . . . .	205
VII.4.3	Neu und alt – Ableitung trifft Parameter . . . . .	210
VII.5	Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Monotonie und die Wertetabelle . . . . .	215
VII.5.1	Stetigkeit – Ohne Sprung ans Ziel . . . . .	215
VII.5.2	Differenzierbarkeit – Knickfrei durch's Leben . . . . .	218
VII.5.3	Monotonie – Wo geht's denn hin? . . . . .	220
VII.5.4	Die Wertetabelle – Eine oft ignorierte Zeichenhilfe . . . . .	225
VII.6	Die Kurvendiskussion – Gesamtübersicht mit Beispiel . . . . .	226

<b>VIII</b>	<b>Über das Lösen linearer Gleichungssysteme</b>	<b>229</b>
VIII.1	LGS mit 2 Unbekannten und 2 Gleichungen . . . . .	229
VIII.1.1	Das Gleichsetzungsverfahren . . . . .	230
VIII.1.2	Das Einsetzungsverfahren . . . . .	231
VIII.1.3	Das Additionsverfahren . . . . .	232
VIII.1.4	Der Umgang mit Parametern bei einem LGS . . . . .	233
VIII.2	LGS mit 3 und mehr Unbekannten . . . . .	234
VIII.2.1	Das Gaußsche Eliminationsverfahren . . . . .	234
VIII.2.2	Gibt es Lösungen – und wenn ja wie viele? . . . . .	237
VIII.3	LGS und Funktionen – Bestimmung ganzrationaler Funktionen . . . . .	243
<b>IX</b>	<b>Mit Brüchen muss man umgehen können – Gebrochenrationale Funktionen</b>	<b>253</b>
IX.1	Grundlagen – Umgang mit Bruchgleichungen und Brüchen . . . . .	253
IX.2	Definition der gebrochenrationalen Funktionen . . . . .	258
IX.3	Ein paar Besonderheiten – Definitionslücken und Asymptoten . . . . .	258
IX.4	Ableiten gebrochenrationaler Funktionen . . . . .	269
<b>X</b>	<b>Trigonometrische Funktionen</b>	<b>271</b>
X.1	Grundlagen und Ableitungsregeln . . . . .	271
X.1.1	Definition und Beispiele . . . . .	271
X.1.2	Vom Einheitskreis zur Funktion . . . . .	273
X.1.3	Das Bogenmaß . . . . .	278
X.1.4	Andere Winkel . . . . .	279
X.1.5	Der Sinussatz . . . . .	280
X.1.6	Der Kosinussatz . . . . .	282
X.1.7	Weitere Betrachtungen zum Einheitskreis . . . . .	284
X.1.8	Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen – Ein wenig Nostalgie bei der Herleitung . . . . .	287
X.2	Übersicht über die Eigenschaften der trigonometrischen Grundfunktionen	292
X.3	Die Modifizierung trigonometrischer Funktionen (Sinus und Kosinus) . .	296
<b>XI</b>	<b>Wachsen ist schön – Exponentialfunktionen</b>	<b>305</b>
XI.1	Grundlagen . . . . .	305
XI.2	Ableiten von Exponentialfunktionen . . . . .	306
XI.3	Wachstum . . . . .	313
XI.3.1	Lineares Wachstum . . . . .	314
XI.3.2	Exponentielles/Natürliches Wachstum . . . . .	314
XI.3.3	Beschränktes Wachstum . . . . .	319
XI.3.4	Logistisches Wachstum . . . . .	319
XI.4	Die Grenzen erfahren – Grenzwertuntersuchung mit L'Hospital . . . . .	321

<b>XII</b>	<b>Die Ableitung der Umkehrfunktion</b>	<b>325</b>
XII.1	Was ist eine Umkehrfunktion? – Grundlagen und Begriffe . . . . .	325
XII.2	Ableiten von Umkehrfunktionen . . . . .	331
XII.2.1	Implizites Differenzieren . . . . .	331
XII.2.2	Ableiten von Umkehrfunktionen mit der Kettenregel . . . . .	332
<b>XIII</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>335</b>
XIII.1	Schritt für Schritt zum Ziel – Ober- und Untersumme . . . . .	335
XIII.1.1	Ober- und Untersumme . . . . .	335
XIII.2	Was haben Stammfunktionen und Integralfunktionen gemeinsam? . . . .	343
XIII.3	Übersicht zu wichtigen Stammfunktionen . . . . .	346
XIII.3.1	Aufleiten mittels der linearen Substitution . . . . .	349
XIII.3.2	Etwas Interessantes – Die Produktintegration . . . . .	350
XIII.3.3	Ein praktischer Satz – Über das Aufleiten von Brüchen . . . . .	352
XIII.4	Flächenberechnung – Worauf man achten sollte . . . . .	353
XIII.5	Einmal rundherum – Berechnung von Rotationsvolumen . . . . .	356
<b>XIV</b>	<b>Beweise mit Vektoren führen</b>	<b>361</b>
XIV.1	Der Vektor in der analytischen Geometrie . . . . .	361
XIV.2	Linear abhängig und unabhängig . . . . .	363
XIV.3	Das Prinzip des geschlossenen Vektorzugs . . . . .	364
XIV.3.1	Ein Beispiel: Teilverhältnis der Seitenhalbierenden im Dreieck . . . . .	365
XIV.4	Ein erstes Produkt für Vektoren: Das Skalarprodukt . . . . .	367
XIV.4.1	Von Vektoren und ihren Beträgen . . . . .	368
XIV.4.2	Das Skalarprodukt: Die Definition und ihre Konsequenzen . . . . .	373
XIV.4.3	Was man vom Skalarprodukt zum Beweisen benötigt . . . . .	376
XIV.4.4	Ein Beispiel: Der Satz des Thales . . . . .	377
XIV.5	Eine Aufgabe zur Vertiefung . . . . .	378
<b>XV</b>	<b>Rechnen im Raum – Analytische Geometrie</b>	<b>381</b>
XV.1	Noch ein Produkt für Vektoren: Das Kreuzprodukt . . . . .	381
XV.2	Eine Runde Teamwork – Das Spatprodukt . . . . .	386
XV.3	Geraden und Vektoren . . . . .	388
XV.4	Ebenen . . . . .	390
XV.4.1	Die Koordinatenform . . . . .	392
XV.4.2	Die Normalenform . . . . .	395
XV.4.3	Umwandeln von Ebenen . . . . .	397
XV.5	Lagebeziehungen . . . . .	400
XV.5.1	Gegenseitige Lagen von Geraden . . . . .	400
XV.5.2	Gegenseitige Lagen von Ebenen . . . . .	402
XV.5.3	Gegenseitige Lagen von Ebene und Gerade . . . . .	407

XV.6	Abstände . . . . .	407
XV.6.1	Der Abstand zweier Punkte . . . . .	408
XV.6.2	Die Hessesche Normalenform – Abstandsbestimmungen bei Ebenen . . .	408
XV.6.3	Abstände, die uns noch fehlen . . . . .	412
XV.7	Ein kurzes Wort über Schnittwinkel . . . . .	416
XV.8	Ein kugelrunder Abschluss . . . . .	418
<b>XVI</b>	<b>Wenn's nicht direkt geht – Ein wenig Numerik</b>	<b>421</b>
XVI.1	Für Nullstellen – Das Newton-Verfahren . . . . .	421
XVI.1.1	Wann Newton nicht funktioniert . . . . .	424
XVI.1.2	Übersicht mit Beispiel . . . . .	424
XVI.2	Für Flächen – Die Keplersche Fassregel . . . . .	425
XVI.2.1	Sehnentrapeze . . . . .	426
XVI.2.2	Tangententrapeze . . . . .	427
XVI.3	Wo Kepler aufhört, da fängt Simpson an – Die Simpson-Regel . . . . .	428
<b>XVII</b>	<b>Wem's reell nicht genug ist – Komplexe Zahlen</b>	<b>431</b>
XVII.1	Von natürlich bis reell – Eine kurze Geschichte der Zahlen . . . . .	431
XVII.2	Komplexe Zahlen – Definition und Grundlagen . . . . .	435
XVII.3	Rechnen mit komplexen Zahlen I . . . . .	436
XVII.4	Polarkoordinaten und komplexe Zahlen . . . . .	440
XVII.5	Euler und eine der schönsten Gleichungen der Mathematik . . . . .	444
XVII.6	Rechnen mit komplexen Zahlen II . . . . .	449
XVII.7	Potenzen berechnen und Wurzelziehen bei komplexen Zahlen . . . . .	451
XVII.8	Bastelstunde: Additionstheoreme . . . . .	454
<b>Anhang</b>		
<b>A</b>	<b>Die Strahlensätze</b>	<b>459</b>
A.1	Einführende Betrachtungen . . . . .	459
A.2	Der 1. Strahlensatz . . . . .	460
A.3	Der 2. Strahlensatz . . . . .	461
A.4	„Kurzversion“ des 1. Strahlensatzes . . . . .	462
<b>B</b>	<b>Ungleich geht die Welt zugrunde – Rechnen mit Ungleichungen</b>	<b>465</b>
B.1	Ganz elementare Regeln . . . . .	465
B.2	Beispiele statt allgemeiner Hudelei . . . . .	466
<b>C</b>	<b>Das Pascalsche Dreieck</b>	<b>469</b>
C.1	Worum es geht . . . . .	469
C.2	Zum Aufstellen des Dreiecks . . . . .	470
C.3	Warum das Schema funktioniert . . . . .	471
<b>Weiterführende Literatur</b>		<b>475</b>
<b>Stichwortverzeichnis</b>		<b>477</b>