

Inhaltsverzeichnis

Teil I Numerische lineare Algebra

1	Grundlegende Konzepte	3
1.1	Aufgabenstellung	3
1.2	Kondition und Stabilität	4
1.3	Aufwand	7
1.4	Lernziele, Quiz und Anwendung	8
2	Operatornorm und Konditionszahl	9
2.1	Vektornormen	9
2.2	Matrixnormen	10
2.3	Konditionszahl	12
2.4	Lernziele, Quiz und Anwendung	13
3	Matrixfaktorisierungen	15
3.1	Dreiecksmatrizen	15
3.2	LU -Zerlegung	16
3.3	Cholesky-Zerlegung	18
3.4	Lernziele, Quiz und Anwendung	21
4	Eliminationsverfahren	23
4.1	Gaußsches Eliminationsverfahren	23
4.2	Pivot-Strategie	26
4.3	Lernziele, Quiz und Anwendung	28
5	Ausgleichsprobleme	31
5.1	Gaußsche Normalengleichung	31
5.2	Householder-Transformationen	33
5.3	QR -Zerlegung	35
5.4	Lösung des Ausgleichsproblems	37
5.5	Lernziele, Quiz und Anwendung	37

6	Singulärwertzerlegung und Pseudoinverse	39
6.1	Singulärwertzerlegung	39
6.2	Pseudoinverse	40
6.3	Lernziele, Quiz und Anwendung	41
7	Das Simplex-Verfahren	43
7.1	Lineare Programme	43
7.2	Der Simplex-Schritt	45
7.3	Lernziele, Quiz und Anwendung	48
8	Eigenwertaufgaben	49
8.1	Lokalisierung	49
8.2	Konditionierung	51
8.3	Potenzmethode	52
8.4	QR -Verfahren	56
8.5	Jacobi-Verfahren	57
8.6	Lernziele, Quiz und Anwendung	61
9	Iterative Lösungsmethoden	63
9.1	Inexakte Lösung	63
9.2	Banachscher Fixpunktsatz	63
9.3	Lineare Iterationsverfahren	65
9.4	Jacobi- und Gauß–Seidel-Verfahren	66
9.5	Diagonaldominanz und Irreduzibilität	67
9.6	Konvergenz	69
9.7	Lernziele, Quiz und Anwendung	70

Teil II Numerische Analysis

10	Allgemeine Konditionszahl und Gleitkommazahlen	75
10.1	Konditionierung	75
10.2	Gleitkommazahlen	77
10.3	Rundung	78
10.4	Stabilität	79
10.5	Lernziele, Quiz und Anwendung	81
11	Polynominterpolation	83
11.1	Lagrange-Interpolation	83
11.2	Interpolationsfehler	85
11.3	Neville-Schema	86
11.4	Tschebyscheff-Knoten	88

11.5	Hermite-Interpolation	90
11.6	Lernziele, Quiz und Anwendung	92
12	Interpolation mit Splines	93
12.1	Splines	93
12.2	Kubische Splines	95
12.3	Berechnung kubischer Splines	98
12.4	Lernziele, Quiz und Anwendung	99
13	Diskrete Fourier-Transformation	101
13.1	Trigonometrische Interpolation	101
13.2	Fourier-Basen	103
13.3	Schnelle Fourier-Transformation	105
13.4	Lernziele, Quiz und Anwendung	107
14	Numerische Integration	109
14.1	Quadraturformeln	109
14.2	Newton–Cotes-Formeln	111
14.3	Summierte Quadraturformeln	112
14.4	Gauß-Quadratur	114
14.5	Extrapolation	117
14.6	Experimentelle Konvergenzordnung	118
14.7	Lernziele, Quiz und Anwendung	119
15	Nichtlineare Probleme	121
15.1	Nullstellensuche und Minimierungsprobleme	121
15.2	Approximation von Nullstellen	122
15.3	Eindimensionale Minimierung	126
15.4	Mehrdimensionale Minimierung	127
15.5	Lernziele, Quiz und Anwendung	129
16	Methode der konjugierten Gradienten	131
16.1	Quadratische Minimierung	131
16.2	Konjugierte Suchrichtungen	132
16.3	Berechnung A -konjugierter Richtungen	133
16.4	CG-Verfahren	135
16.5	Konvergenz des CG-Verfahrens	136
16.6	Lernziele, Quiz und Anwendung	138
17	Dünnbesetzte Matrizen und Vorkonditionierung	141
17.1	Dünnbesetzte Matrizen	141
17.2	Vorkonditioniertes CG-Verfahren	142

17.3	Weitere Vorkonditionierungsmatrizen	144
17.4	Lernziele, Quiz und Anwendung	146
18	Mehrdimensionale Approximation	149
18.1	Gitter und Triangulierungen	149
18.2	Approximation auf Tensorproduktgittern	151
18.3	Zweidimensionale Fourier-Transformation	153
18.4	Approximation auf Triangulierungen	154
18.5	Lernziele, Quiz und Anwendung	157
 Teil III Numerik gewöhnlicher Differenzialgleichungen		
19	Gewöhnliche Differenzialgleichungen	161
19.1	Grundlagen	161
19.2	Das Räuber-Beute-Modell	162
19.3	Gleichungen höherer Ordnung	163
19.4	Autonome Gleichungen	164
19.5	Zweikörperprobleme	165
19.6	Explizite Lösungen	166
19.7	Lernziele, Quiz und Anwendung	166
20	Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität	169
20.1	Existenz und Eindeutigkeit	169
20.2	Lemma von Gronwall	172
20.3	Stabilität	173
20.4	Lernziele, Quiz und Anwendung	175
21	Einschrittverfahren	177
21.1	Euler-Verfahren	177
21.2	Konsistenz	179
21.3	Diskretes Gronwall-Lemma und Konvergenz	181
21.4	Verfahren höherer Ordnung	184
21.5	Lernziele, Quiz und Anwendung	185
22	Runge–Kutta-Verfahren	187
22.1	Motivation	187
22.2	Runge–Kutta-Verfahren	188
22.3	Wohlgestelltheit	190
22.4	Konsistenz	192
22.5	Lernziele, Quiz und Anwendung	196

23	Mehrschrittverfahren	199
23.1	Allgemeine Mehrschrittverfahren	199
23.2	Konsistenz	201
23.3	Adams-Verfahren	202
23.4	Prädiktor-Korrektor-Verfahren	204
23.5	Lernziele, Quiz und Anwendung	206
24	Konvergenz von Mehrschrittverfahren	209
24.1	Differenzengleichungen	209
24.2	Nullstabilität	211
24.3	Konvergenz	213
24.4	Lernziele, Quiz und Anwendung	215
25	Steife Differenzialgleichungen	217
25.1	Steifheit	217
25.2	A-Stabilität	218
25.3	Gradientenflüsse	222
25.4	Wärmeleitungsgleichung	223
25.5	Lernziele, Quiz und Anwendung	225
26	Schrittweitensteuerung	227
26.1	A-posteriori Fehlerkontrolle	227
26.2	Adaptiver Algorithmus	230
26.3	Kontrollverfahren	230
26.4	Extrapolation	231
26.5	Lernziele, Quiz und Anwendung	231
27	Symplektische, Schieß- und dG-Verfahren	233
27.1	Hamiltonsche Systeme	233
27.2	Symplektische Verfahren	235
27.3	Schießverfahren	239
27.4	Diskontinuierliche Galerkin-Verfahren	240
27.5	Lernziele, Quiz und Anwendung	241

Teil IV Aufgabensammlungen

28	Aufgaben zur numerischen linearen Algebra	245
28.1	Grundlegende Konzepte	245
28.2	Operatornorm und Konditionszahl	247
28.3	Matrixfaktorisierungen	250
28.4	Eliminationsverfahren	254
28.5	Ausgleichsprobleme	257

28.6	Singulärwertzerlegung und Pseudoinverse	261
28.7	Das Simplex-Verfahren	264
28.8	Eigenwertaufgaben	267
28.9	Iterative Lösungsmethoden	271
29	Aufgaben zur numerischen Analysis	275
29.1	Allgemeine Konditionszahl und Maschinenzahlen	275
29.2	Polynominterpolation	278
29.3	Interpolation mit Splines	281
29.4	Diskrete Fourier-Transformation	284
29.5	Numerische Integration	288
29.6	Nichtlineare Probleme	291
29.7	Methode der konjugierten Gradienten	294
29.8	Dünnbesetzte Matrizen und Vorkonditionierung	298
29.9	Mehrdimensionale Approximation	301
30	Aufgaben zur Numerik gewöhnlicher Differenzialgleichungen	305
30.1	Gewöhnliche Differenzialgleichungen	305
30.2	Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität	309
30.3	Einschrittverfahren	311
30.4	Runge–Kutta-Verfahren	315
30.5	Mehrschrittverfahren	318
30.6	Konvergenz von Mehrschrittverfahren	321
30.7	Steife Differenzialgleichungen	324
30.8	Schrittweitensteuerung	327
30.9	Symplektische, Schieß- und dG-Verfahren	330
 Teil V Anhänge		
31	Aussagen der linearen Algebra	335
31.1	Skalarprodukt von Vektoren	335
31.2	Determinante quadratischer Matrizen	335
31.3	Bild und Kern linearer Abbildungen	336
31.4	Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit	337
31.5	Jordansche Normalform	338
32	Aussagen der Analysis	339
32.1	Stetige und differenzierbare Funktionen	339
32.2	Mittelwertsatz und Taylor-Polynome	340
32.3	Landau-Symbole	340
32.4	Fundamentalsatz der Algebra	341
32.5	Mehrdimensionale Differenzialrechnung	342

33	Einführung in C	343
33.1	Struktur	343
33.2	Bibliotheken	343
33.3	Typen	344
33.4	Kontrollanweisungen	345
33.5	Logische Ausdrücke und Inkremente	345
33.6	Funktionen	346
33.7	Pointer	346
33.8	Dynamische Arrays	347
33.9	Arbeiten mit Matrizen	347
33.10	Zeitmessung, Speicherung und Pakete	349
34	Einführung in Matlab	351
34.1	Aufbau	351
34.2	Listen und Arrays	351
34.3	Matrixoperationen	352
34.4	Manipulation von Arrays	353
34.5	Elementare Funktionen	353
34.6	Schleifen und Kontrollanweisungen	353
34.7	Text- und Grafikausgabe	354
34.8	Erstellen neuer Funktionen	354
34.9	Verschiedene Befehle	355
34.10	Dünnbesetzte Matrizen	355
34.11	Beispiele	356
34.12	Freie Alternativen	357
35	Beispielprogramme in Matlab und C	359
35.1	LU -Zerlegung und Lösen von Dreieckssystemen	359
35.2	Polynominterpolation und Neville-Schema	362
35.3	Numerische Lösung gewöhnlicher Differenzialgleichungen	365
Anhang A – Weiterführende Themen		369
Anhang B – Literaturhinweise		371
Anhang C – Notation		375
Sachverzeichnis		377