
Inhaltsverzeichnis

1	Unendliche Reihen	1
1.1	Folgen und Reihen	1
1.1.1	Achill und die Schildkröte	1
1.1.2	Rechnen mit Grenzwerten	7
1.1.3	Anwendungen von unendlichen Reihen	13
1.2	Konvergenz und Divergenz	14
1.2.1	Konvergenztests für Reihen	17
1.3	Potenzreihen	23
1.3.1	Einfache Wege zur Potenzreihe	28
1.3.2	Konvergenz und Genauigkeit	31
1.3.3	Anwendungen	35
1.4	Was war da noch?	43
1.4.1	Funktionenreihen	43
1.4.2	Divergente Reihen	44
1.5	Aufgaben und Lösungen	45
1.5.1	Aufgaben	45
1.5.2	Lösungen	48
	Literatur	49
2	Komplexe Zahlen	51
2.1	Komplexe Zahlen und die komplexe Ebene	51
2.2	Komplexe Reihen	59
2.3	Funktionen komplexer Variablen	61
2.3.1	Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen	62
2.3.2	Wurzeln	66
2.3.3	Andere Umkehrfunktionen	68
2.4	Riemannsche Blätter	70
2.4.1	Schnittstruktur einiger Funktionen	74
2.5	Anwendungen	77
2.6	Aufgaben und Lösungen	81
2.6.1	Aufgaben	81

2.6.2	Lösungen	84
	Literatur	85
3	Vektoren und Matrizen	87
3.1	Lineare Gleichungssysteme	87
3.1.1	Determinanten	88
3.1.2	Lösung eines linearen Gleichungssystems	93
3.2	Matrizen	97
3.2.1	Lineare Algebra der Matrizen	97
3.2.2	Die inverse Matrix	102
3.2.3	Lösung durch Matrixinversion	106
3.2.4	Weiteres Zubehör	106
3.2.5	Lineare Abhängigkeit	108
3.2.6	Rang einer Matrix	114
3.3	Vektoren und ihre Algebra	118
3.3.1	Vektoren	118
3.3.2	Vektoralgebra	121
3.3.3	Analytische Geometrie	130
3.4	Das Eigenwertproblem	135
3.4.1	Quadratische Formen	142
3.4.2	Funktionen von Matrizen	146
3.5	Aufgaben und Lösungen	149
3.5.1	Aufgaben	149
3.5.2	Lösungen	151
	Literatur	152
4	Differenzialrechnung	155
4.1	Die lineare Näherung	155
4.2	Funktionen mehrerer Variablen	164
4.3	Verschiedene Methoden der Differenziation	172
4.3.1	Kettenregel und Produktregel	173
4.3.2	Implizite Differenziation	176
4.4	Extremwertaufgaben	179
4.5	Nebenbedingungen	185
4.5.1	Elimination	186
4.5.2	Lagrangesche Multiplikatoren	187
4.6	Randpunkte	194
4.7	Aufgaben und Lösungen	203
4.7.1	Aufgaben	203
4.7.2	Lösungen	207
	Literatur	210

5	Integralrechnung	211
5.1	Das Integral	211
5.1.1	Die Stammfunktion	211
5.1.2	Lebesgue-Integral	213
5.2	Integrationstechnik	221
5.2.1	Einfache Regeln	222
5.2.2	Transformation der Variablen	223
5.2.3	Partielle Integration	227
5.2.4	Systematische Verfahren	233
5.2.5	Integration entlang einer Kurve	235
5.2.6	Uneigentliche Integrale	237
5.3	Differenziation von Integralen	238
5.4	Mehrdimensionale Integrale	242
5.4.1	Variablentransformation	252
5.5	Aufgaben und Lösungen	260
5.5.1	Aufgaben	260
5.5.2	Lösungen	263
	Literatur	265
6	Gewöhnliche Differenzialgleichungen	267
6.1	Allgemeines	267
6.1.1	Einleitung	267
6.1.2	Klassifikation	271
6.2	Gewöhnliche Differenzialgleichungen 1. Ordnung	272
6.2.1	Existenz und Eindeutigkeit	272
6.2.2	Lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung	274
6.2.3	Nichtlineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung	280
6.2.4	Numerische Integration	290
6.3	Gewöhnliche Differenzialgleichungen höherer Ordnung	294
6.3.1	Allgemeines	294
6.3.2	Konstante Koeffizienten	295
6.3.3	Inhomogene lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	302
6.3.4	Nichtkonstante Koeffizienten	309
6.4	Systeme von Differenzialgleichungen	314
6.4.1	Formulierung und linearer Fall	314
6.4.2	Stabilitätsanalyse und dynamische Systeme	320
6.5	Zum Abschluss	323
6.6	Aufgaben und Lösungen	324
6.6.1	Aufgaben	324
6.6.2	Lösungen	327
	Literatur	330

7	Grundlagen der Vektoranalysis	333
7.1	Differenziation von Vektoren	333
7.2	Bogenlänge, Krümmung und Torsion	337
7.3	Linien- und Oberflächenintegrale	344
7.4	Skalare Felder: Niveauflächen und Gradient	355
7.5	Divergenz und Rotation von Vektorfeldern	361
7.5.1	Bedeutung der Divergenz	362
7.5.2	Bedeutung der Rotation	364
7.6	Aufgaben und Lösungen	369
7.6.1	Aufgaben	369
7.6.2	Lösungen	371
	Literatur	372
8	Basissysteme krummliniger Koordinaten	373
8.1	Gebräuchliche Koordinatensysteme	373
8.2	Bestimmung von Vektorkomponenten	377
8.3	Bogen-, Flächen- und Volumenelement	384
8.4	Aufgaben und Lösungen	387
8.4.1	Aufgaben	387
8.4.2	Lösungen	388
	Literatur	389
9	Integralsätze	391
9.1	Der Gaußsche Integralsatz	391
9.2	Der Greensche Satz in der Ebene	397
9.3	Der Integralsatz von Stokes	401
9.4	Aufgaben und Lösungen	407
9.4.1	Aufgaben	407
9.4.2	Lösungen	409
	Literatur	410
10	Elemente der Tensorrechnung	411
10.1	Definition eines Tensors	411
10.2	Rechenregel für Tensoren	415
10.3	Beispiele für Tensoren	416
10.3.1	Der ϵ -Tensor	416
10.3.2	Der Trägheitstensor	419
10.4	Differenzialoperationen und Tensoren	420
10.5	Drehung um eine Achse	422
10.6	Ko- und kontravariante Darstellung	426
10.7	Wechsel der Basis	432
10.8	Aufgaben und Lösungen	437

10.8.1 Aufgaben	437
10.8.2 Lösungen	439
Literatur	440
11 Ein wenig Differenzialformen	441
11.1 Äußere Formen	441
11.2 Äußere Ableitung	449
11.3 Integralsätze	455
11.4 Aufgaben und Lösungen	460
11.4.1 Aufgaben	460
11.4.2 Lösungen	461
Literatur	461
12 Funktionenräume	463
12.1 Vektorräume	463
12.1.1 Rückblick: Vektoren im $\mathbb{R}^3$	463
12.1.2 Lineare Räume	465
12.2 Metrik, Norm, Skalarprodukt	468
12.2.1 Metrik	468
12.2.2 Norm	469
12.2.3 Skalarprodukt	472
12.3 Basis eines Vektorraums	476
12.3.1 Orthonormale Basis	476
12.3.2 Komponentendarstellung	479
12.4 Aufgaben und Lösungen	484
12.4.1 Aufgaben	484
12.4.2 Lösungen	487
Literatur	488
13 Fourierreihe	489
13.1 Motivation und Definition	489
13.2 Konvergenzkriterien	492
13.3 Tipps und Beispiele	494
13.4 Komplexe Form der Fourierreihe	499
13.5 Fourier-Kosinus- und Fourier-Sinus-Reihe	503
13.6 Aufgaben und Lösungen	510
13.6.1 Aufgaben	510
13.6.2 Lösungen	511
Literatur	512
14 Integraltransformationen	513
14.1 Vorwort	513
14.2 Die Laplace-Transformation	514

14.3	Die Fouriertransformation	520
14.4	Faltung	525
14.5	Aufgaben und Lösungen	529
14.5.1	Aufgaben	529
14.5.2	Lösungen	530
	Literatur	531
15	Funktionale und Variationsrechnung	533
15.1	Funktionale	533
15.2	Variationsrechnung	536
15.3	Distributionen und die Diracsche Deltafunktion	546
15.4	Aufgaben und Lösungen	553
15.4.1	Aufgaben	553
15.4.2	Lösungen	554
	Literatur	554
16	Operatoren und Eigenwerte	555
16.1	Einleitung	555
16.2	Das Eigenwertproblem in der linearen Algebra	556
16.3	Lineare Operatoren in Vektorräumen	564
16.3.1	Eigenschaften	564
16.3.2	Darstellungen	567
16.3.3	Das Eigenwertproblem für Operatoren	578
16.4	Die Differenzialgleichung als Eigenwertproblem	579
16.4.1	Schwingungsgleichung	580
16.4.2	Legendresche Differenzialgleichung	581
16.4.3	Sturm-Liouville-Problem	582
16.5	Aufgaben und Lösungen	585
16.5.1	Aufgaben	585
16.5.2	Lösungen	586
	Literatur	587
17	Spezielle Differenzialgleichungen	589
17.1	Die Legendresche Differenzialgleichung	589
17.1.1	Kugelflächenfunktionen	597
17.2	Die Besselsche Differenzialgleichung	600
17.3	Die Hermitesche Differenzialgleichung	607
17.4	Die Laguerresche Differenzialgleichung	608
17.5	Aufgaben und Lösungen	609
17.5.1	Aufgaben	609
17.5.2	Lösungen	611
	Literatur	612

18	Partielle Differenzialgleichungen	613
18.1	Übersicht	613
18.1.1	Elliptischer Typ	613
18.1.2	Parabolischer Typ	615
18.1.3	Hyperbolischer Typ	616
18.2	Lösungsmethoden: Numerische Verfahren	617
18.3	Analytische „exakte“ Verfahren	619
18.3.1	Integraldarstellung	620
18.3.2	Integraltransformation	620
18.3.3	Greensche Funktion	622
18.3.4	Separation der Variablen	629
18.4	Aufgaben und Lösungen	642
18.4.1	Aufgaben	642
18.4.2	Lösungen	644
	Literatur	645
19	Funktionentheorie	647
19.1	Analytische Funktionen	647
19.1.1	Stetigkeit	647
19.1.2	Differenzierbarkeit	649
19.1.3	Potenzreihen	658
19.2	Komplexe Integration	660
19.2.1	Linienintegral	660
19.2.2	Integralsatz von Cauchy	664
19.2.3	Integralformel von Cauchy	669
19.2.4	Laurentreihe	672
19.2.5	Residuensatz	675
19.2.6	Schnitte	679
19.3	Anwendungen	682
19.3.1	Integrale	682
19.3.2	Fouriertransformation	683
19.3.3	Dispersionsrelationen	685
19.3.4	Hauptwertintegrale	687
19.3.5	Konforme Abbildungen	690
19.4	Aufgaben und Lösungen	695
19.4.1	Aufgaben	695
19.4.2	Lösungen	697
	Literatur	699
20	Gruppen	701
20.1	Symmetrien und Gruppen	701
20.2	Zweierlei Klassen	706

20.2.1 Konjugationsklassen	706
20.2.2 Nebenklassen	709
20.2.3 Einige Untergruppen	710
20.3 Einige wichtige Gruppen	713
20.4 Darstellung	719
20.5 Kontinuierliche Gruppen	726
20.5.1 Darstellung und Parameter	726
20.5.2 Generatoren und Lie-Algebra	732
20.5.3 Anwendungen in der Physik	742
20.6 Aufgaben und Lösungen	743
20.6.1 Aufgaben	743
20.6.2 Lösungen	745
Literatur	746
21 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik	747
21.1 Zufall und Wahrscheinlichkeit	747
21.1.1 Wahrscheinlichkeit	747
21.1.2 Zufallsvariablen und Verteilungsfunktionen	754
21.1.3 Erwartungswerte und Momente	757
21.2 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen	762
21.2.1 Binomialverteilung	762
21.2.2 Poisson-Verteilung	764
21.2.3 Gleichverteilung	766
21.2.4 Normalverteilung	767
21.2.5 Exponentialverteilung	769
21.2.6 Histogramme	769
21.3 Funktionen von Zufallsvariablen	772
21.3.1 Fehlerfortpflanzung	778
21.4 Mehrere Zufallsvariablen	779
21.4.1 Verteilungsfunktion und Verteilungsdichte	779
21.4.2 Funktionen von mehreren Zufallsvariablen	783
21.4.3 Zentraler Grenzwertsatz	786
21.4.4 Autokorrelation	788
21.5 Analyse von Daten und Fehlern	788
21.5.1 Schätzung der Parameter einer Verteilung	789
21.5.2 Andere Verfahren	793
21.5.3 Fit, mach mit!	795
21.5.4 Hypothesentest	803
21.6 Aufgaben und Lösungen	807
21.6.1 Aufgaben	807
21.6.2 Lösungen	809
Literatur	811

A	Abkürzungen und Anmerkungen	813
B	Zoologie elementarer Funktionen	823
	B.1 Polynome und rationale Funktionen	826
	B.2 Exponentialfunktion und Logarithmus	828
	B.3 Trigonometrische Funktionen	832
C	Programmbeispiele	839
	Literatur	840
	Sachverzeichnis	841