

# Inhaltsverzeichnis

<b>Geleitwort</b> . . . . .	11
<b>Vorwort</b> . . . . .	13
<b>Teil IV: Algebra</b> . . . . .	17
<b>11 Zahlen und Zahlensysteme</b> . . . . .	18
11.1 Vorläufer unserer Zahlen . . . . .	18
11.2 Das Fünfersystem im Unterricht. . . . .	22
11.3 Darstellung großer Zahlen. . . . .	27
11.4 Eine technische Veranschaulichung von Zahlensystemen bzw. exponentiellem Wachstum: Übersetzung von Zahnrädern . . . . .	29
11.5 Addition und Übertrag . . . . .	31
11.6 Multiplikation und das kleine Einmaleins im Fünfersystem . . . . .	33
11.7 Wunderkerzen und exponentielles Wachstum . . . . .	34
11.8 Einführung von Wurzeln – Intervallsschachtelung . . . . .	36
11.9 Strukturverlust durch Zahlenbereichserweiterung . . . . .	39
<b>12 Rechnen</b> . . . . .	43
12.1 Rechteck- und Quadratzahlen im kleinen Einmaleins . . . . .	44
12.2 Die schwierigste Aufgabe des kleinen Einmaleins. . . . .	47
12.3 Rechenwege abschreiten – das große Einmaleins erkunden . . . . .	50
12.4 Strukturelles Lernen des großen Einmaleins . . . . .	57
12.5 Noch mehr Rechenwege: diagonale Wege im Einmaleins und binomische Formeln . . . . .	58
12.6 das dritte Binom haptisch erfahren . . . . .	60
12.7 Ausklammern und ausmultiplizieren: das Distributivgesetz . . . . .	62
12.8 $(a + b)^2$ , $(a + b)^3$ und weitere geometrische Interpretationen . . . . .	63
12.9 Gehirngerechtes Lernen, Gestaltpsychologie . . . . .	65
12.10 $5 - (-2)$ oder die Addition und Subtraktion ganzer Zahlen . . . . .	67
12.11 Üben im Rundgang . . . . .	68
12.12 Abfragen mit Hüpfen . . . . .	70
12.13 Minus mal Minus ergibt Plus . . . . .	71

<b>13</b>	<b>Brüche und ihre Addition</b>	78
13.1	Erste Erfahrungen mit Anteilen	80
13.2	Der Bruch als Anteil: ein lebendiges Domino	84
13.3	Halbieren bis ins Aschgraue	88
13.4	Erweitern und Kürzen	91
13.5	Erweitern und Kürzen als Gruppenübung	95
13.6	Vollständig gekürzter Bruch und Primzahlen	98
13.7	Das Sieb des Eratosthenes	99
13.8	Telefonnummern und Primzahlen	101
13.9	Teilbarkeitsregeln: ein Beweis für die Teilbarkeit durch 3 (bzw. 9)	102
13.10	Pascalsches Dreieck – Malen nach Zahlen	106
13.11	Mathematik ist Mustererkennung – Zahlenfolgen im Pascalschen Dreieck	110
13.12	Brüche als Prozentzahlen	114
13.13	Blinder Wissenschaftler erklärt Ahnungslosem: der Sprung ins Analytische	116
13.14	Was ergibt $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ? Addition und Subtraktion von Brüchen	117
13.15	Addition von Brüchen im gehirngerechten Tafelaufschrieb	119
13.16	Gemischte Schreibweise bei Brüchen	120
13.17	Formalismus als Geschenk	121
13.18	Eigene Übungsaufgaben: ein Domino	122
13.19	Eigene Übungsaufgaben in Kleingruppen	124
13.20	Die Sache mit der Null	125
13.21	Unendlich ist keine Zahl	132
13.22	Gibt es mehr Brüche als natürliche Zahlen? Das Hilbertsche Hotel und der Umgang mit dem Unendlichen	133
<b>14</b>	<b>Multiplizieren von Brüchen</b>	137
14.1	Anteile von Anteilen oder der gefundene Schatz	137
14.2	Trinken von Brüchen	141
14.3	Multiplikation von Brüchen: „Von“ wird zu „mal“	144
14.4	Aufschrieb der Regel „Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner“	148
14.6	Über Zahlen und ihre Rollen – kleiner Exkurs für den theatralen Mathematiker	152
14.7	Brüche im Dezimalsystem: Dezimalbrüche	152
14.8	Kommazahlen verstehen: andere Zahlensysteme	155

---

14.9	Division durch Brüche . . . . .	159
14.10	Können Operatoren vertauscht werden? . . . . .	167
14.11	„Punkt vor Strich“ und Klammerrechnung . . . . .	169
14.12	Brüche am Fahrrad – der Bruch als Verhältnis . . . . .	170
14.13	Algebra der Übersetzungen – Bruchrechnen mit Getrieben . . . . .	174
14.14	Neidfreies Teilen unter zwei Personen. . . . .	180
14.15	Neidfreies Teilen unter drei Personen . . . . .	183
<b>15</b>	<b>Potenzen. . . . .</b>	<b>189</b>
15.1	Plädoyer für vernetztes Lernen . . . . .	189
15.2	Der Weltraum, unendliche Weiten . . . . .	195
15.3	Umgang mit großen Zahlen – Modell unseres Sonnensystems . . . . .	197
15.4	Einführung in das Rechnen mit Potenzen . . . . .	199
15.5	Exponentielles Wachstum ist unabsehbar . . . . .	200
15.6	Potenzgesetze oder das Aufschließen von Gleichungen	206
15.7	Musik und Mathematik: Gitarre und exponentielles Wachstum . . . . .	211
15.8	Warum gilt $2^0 = 1?$ . . . . .	215
<b>Teil V: Terme, Gleichungen und Vektorrechnung . . . . .</b>		<b>217</b>
<b>16</b>	<b>Terme und Gleichungen. . . . .</b>	<b>218</b>
16.1	Mathematik ist eine Sprache – Rechengesetze als Grammatik . . . . .	219
16.2	Mathematik als Schachspiel . . . . .	220
16.3	Terme: eine haptische Einführung . . . . .	222
16.4	Die Leonardo-Brücke: Anzahl der Querstreben als Variable. . . . .	228
16.5	Gleichungen – eine Waage für Streichhölzer . . . . .	234
16.6	Gleichungen konstruieren, Gleichungen lösen . . . . .	243
16.7	Mit negativen Zahlen haptisch rechnen: Bedeutung der Ortskodierung . . . . .	246
16.8	Haptische Interpretationen in der Algebra . . . . .	254
16.9	Aus-x-en und Rechnen mit Klammern . . . . .	256
16.10	Schritt für Schritt – Lösungen abschreiten . . . . .	259
16.11	Rubik's Cube und Algorithmen . . . . .	262

<b>17</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme und Vektoren</b>	271
17.1	Einführung: Algebraische und grafische Welten	271
17.2	Die Lösungsmenge einer Gleichung mit zwei Variablen	275
17.3	Gleichungen mit drei Variablen – eine Ebene entsteht	278
17.4	Ein erstes LGS, Gleichsetzungs- und Einsetzungsverfahren	281
17.5	Das Gaußverfahren: Informationen wandern von Planet zu Planet	289
17.6	Gaußverfahren zum Anfassen	290
17.7	Addition von Vektoren	294
17.8	Einführung der Addition von Vektoren – Projektion einer Verknüpfung	296
17.9	Die Raumecke als Koordinatensystem	298
17.10	Weitere Koordinatensysteme	300
17.11	Lineare Unabhängigkeit oder ein geschlossener Rundwanderweg	302
<b>18</b>	<b>Ebenen und Geraden</b>	304
18.1	Gleichungen entsprechen Ebenen, Ebenen Gleichungen	304
18.2	Parameterform oder die Konstruktion einer Geraden	306
18.3	Eine Gerade aus Köpfen	310
18.4	Unendlich viele Geraden oder die Ebene in Parameterform	311
18.5	Stifte und Geodreiecke als Geraden und Ebenen	313
18.6	Normalengleichung einer Ebene	317
18.7	Von einer Koordinatengleichung über eine Parameterform zur Normalenform	319
	<b>Literatur</b>	329
	<b>Sachverzeichnis</b>	331