

## Inhaltsverzeichniss.

### Einleitung

Aufgabe, Ansprüche an die Beweisführung, Dedekind's System, Schröder's Klasse . . . . .	Seite 1
--	---------

### I. Darlegung der Begriffsschrift.

#### 1. Die Urzeichen.

##### Einleitendes über Function, Begriff, Beziehung.

§ 1. Die Function ist ungesättigt . . . . .	Seite 5
§ 2. Wahrheitswerthe, Bedeutung und Sinn, Gedanke, Gegenstand . . . . .	" 6
§ 3. Werthverlauf einer Function, Begriff, Umfang eines Begriffes . . . . .	" 7
§ 4. Functionen mit zwei Argumenten . . . . .	" 8

##### Zeichen von Functionen.

§ 5. Urtheil und Gedanke, Urtheilstrich und Wagerechter . . . . .	Seite 9
§ 6. Verneinungstrich, Verschmelzung der Wagerechten . . . . .	" 10
§ 7. Gleichheitszeichen . . . . .	" 11
§ 8. Allgemeinheit, deutscher Buchstabe, dessen Gebiet, Verschmelzung der Wagerechten . . . . .	" 11
§ 9. Bezeichnung des Werthverlaufs, kleiner griechischer Vokalbuchstabe, dessen Gebiet . . . . .	" 14
§ 10. Genauere Bestimmung, was der Werthverlauf einer Function sein solle . . . . .	" 16
§ 11. Ersatz des bestimmten Artikels, die Function $\forall \xi$ . . . . .	" 18
§ 12. Bedingungstrich, und, weder—noch, oder, Unterglieder, Oberglied . . . . .	" 20
§ 13. Wenn, alle, jeder, Unterordnung, particulär behandelnder Satz, einige . . . . .	" 23

##### Schlüsse und Folgerungen.

§ 14. Erste Schlussweise . . . . .	Seite 25
§ 15. Zweite Schlussweise, Wendung . . . . .	" 26
§ 16. Dritte Schlussweise . . . . .	" 30
§ 17. Lateinische Buchstaben, Uebergang von lateinischen zu deutschen Buchstaben . . . . .	" 31
§ 18. Gesetze in Begriffsschriftzeichen (I, IV, VI) . . . . .	" 34

Erweiterung der Allgemeinheitsbezeichnung.

§ 19. Die Allgemeinheit hinsichtlich der Functionen; Functions-, Gegenstandsbuchstaben . . . . .	Seite 34
§ 20. Gesetze in Begriffsschriftzeichen (II a, III, V) . . . . .	" 35
§ 21. Functionen und Begriffe erster und zweiter Stufe . . . . .	" 36
§ 22. Beispiele von Functionen zweiter Stufe, ungleichstufige Functionen und Beziehungen . . . . .	" 38
§ 23. Arten der Argumente und Argumentstellen, Functionen zweiter Stufe mit Argumenten zweiter und dritter Art . . . . .	" 39
§ 24. Allgemeine Erklärung des Gebrauchs der Functionsbuchstaben . . . . .	" 41
§ 25. Die Allgemeinheit hinsichtlich der Functionen zweiter Stufe, Gesetz II b . . . . .	" 42

2. Definitionen.

Allgemeines.

§ 26. Eintheilung der Zeichen, Namen, Marken, Begriffsschriftsatz, Zwischenzeichen . . . . .	Seite 43
§ 27. Der Definitions Doppelstrich . . . . .	" 44
§ 28. Rechtmässige Bildung der Namen . . . . .	" 45
§ 29. Wann bedeutet ein Name etwas? . . . . .	" 45
§ 30. Zwei Weisen, einen Namen zu bilden . . . . .	" 46
§ 31. Unsere einfachen Namen bedeuten etwas . . . . .	" 48
§ 32. Jeder Begriffsschriftsatz drückt einen Gedanken aus . . . . .	" 50
§ 33. Grundsätze des Definirens . . . . .	" 51

Besondere Definitionen.

§ 34. Definition der Function $\xi \wedge \zeta$ . . . . .	Seite 52
§ 35. Vertretung der Functionen zweiter Stufe durch solche erster Stufe . . . . .	" 54
§ 36. Der Doppelwerthverlauf. Der Umfang einer Beziehung . . . . .	" 54
§ 37. Definition der Function $I\xi$ . . . . .	" 55
§ 38. Definition der Function $\rangle\xi$ . . . . .	" 56
§ 39. Definition der Function $\mathbb{P}\xi$ . . . . .	" 57
§ 40. Definition der Function $\mathbb{P}\xi$ . . . . .	" 57
§ 41. Definition der $\emptyset$ . . . . .	" 57
§ 42. Definition der 1, Begriff der Anzahl . . . . .	" 58
§ 43. Definition von f . . . . .	" 58
§ 44. Einige Begriffsschriftsätze als Beispiele . . . . .	" 58
§ 45. Definition der Function $\perp\xi$ , Folgen und Vorhergehen in einer Reihe . . . . .	" 59
§ 46. Definition der Function $\cup\xi$ . . . . .	" 60

3. Abgeleitete Gesetze.

§ 47. Zusammenstellung der Grundgesetze . . . . .	" 60
§ 48. Zusammenstellung der Regeln . . . . .	" 61
§ 49. Ableitung einiger Sätze aus (I) . . . . .	" 64
§ 50. Ableitung der Hauptsätze von der Function $\xi = \zeta$ . . . . .	" 65

§ 51. Ableitung einiger Sätze aus (IV)	Seite 68
§ 52. Ableitung einiger Sätze aus (V) und (VI)	„ 69

## II. Beweise der Grundgesetze der Anzahl.

§ 53. Vorbemerkungen	Seite 70
----------------------	----------

### A. Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash pu = pv \\ \vdash u \wedge (v \wedge q) \\ , v \wedge (u \wedge \neg q) \end{array}$$

a) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash w \wedge (v \wedge (p \rightarrow q)) \\ \vdash w \wedge (u \wedge p) \\ , u \wedge (v \wedge q) \end{array}$$

§ 54 bis § 59. Definition der Function $\xi \rightarrow \zeta$ , Sätze (1) bis (19)	Seite 70
---	----------

b) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash q \vdash w \wedge (v \wedge q) \\ \vdash q \vdash v \wedge (w \wedge \neg q) \\ \vdash q \vdash w \wedge (u \wedge q) \\ \vdash q \vdash u \wedge (w \wedge \neg q) \\ \vdash u \wedge (v \wedge q) \\ , v \wedge (u \wedge \neg q) \end{array}$$

und Ende des Abschnittes A.

§ 60 bis § 65. Sätze bis (32)	Seite 80
-------------------------------	----------

### B. Beweis des Satzes $\vdash If$

a) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash pw = pz \\ \vdash b \wedge w \\ \vdash c \wedge z \\ \vdash q \vdash w \wedge (z \wedge q) \\ \vdash q \vdash z \wedge (w \wedge \neg q) \\ \vdash a \vdash b \wedge (a \wedge q) \\ \vdash a \vdash c \wedge (a \wedge \neg q) \end{array}$$

§ 66 bis § 77. Sätze bis (56)	Seite 86
-------------------------------	----------

b) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash pu = pv \\ \vdash b \wedge u \\ \vdash \xi \vdash (\tau \xi = b) = \xi \vdash (\tau \xi = c) \\ \vdash c \wedge v \end{array}$$

und Ende des Abschnittes B.

§ 78 bis § 87. Sätze bis (71)	Seite 101
-------------------------------	-----------

I. Beweis des Satzes „Iff“.

a) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash \left( \left[ \begin{array}{l} \varepsilon \\ \vdash \end{array} \right] \left( \begin{array}{l} \varepsilon = m \\ \vdash \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} \varepsilon = b \\ \vdash \end{array} \right) \right) \wedge \left( \left[ \begin{array}{l} \varepsilon \\ \vdash \end{array} \right] \left( \begin{array}{l} \varepsilon = n \\ \vdash \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} \varepsilon = c \\ \vdash \end{array} \right) \right) \wedge \left[ \begin{array}{l} \varepsilon \\ \vdash \end{array} \right] \left( \begin{array}{l} \varepsilon \wedge (\alpha \wedge q) \\ \vdash \end{array} \right) \\ \vdash c \wedge (m \wedge q) \\ \vdash \text{Iff} q \\ \vdash b \wedge (n \wedge q) \\ \vdash u \wedge (v \wedge q) \end{array}$$

§ 88 bis § 91. Sätze bis (84) . . . . . Seite 118

b) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash \begin{array}{l} \text{Iff} u = \text{Iff} v \\ \vdash \text{Iff} \left( \begin{array}{l} \varepsilon = b \\ \vdash \end{array} \right) = \text{Iff} \left( \begin{array}{l} \varepsilon = c \\ \vdash \end{array} \right) \\ \vdash b \wedge u \\ \vdash c \wedge v \end{array} \end{array}$$

und Schluss des Abschnittes I.

§ 92 bis § 95. Sätze bis (90) . . . . . Seite 121

A. Beweise einiger Sätze von der Anzahl Null.

a) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash f(a) \\ \vdash \text{Iff} f(e) = 0 \end{array}$$

§ 96 bis § 97. Sätze bis (95) . . . . . Seite 127

b) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash \text{Iff} u = 0 \\ \vdash a \wedge u \end{array}$$

und einiger Folgesätze.

§ 98 bis § 101. Sätze bis (107) . . . . . Seite 128

E. Beweise einiger Sätze von der Anzahl Eins.

§ 102 bis § 107. Sätze bis (122) . . . . . Seite 131

Z. Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash b \wedge (b \wedge f) \\ \vdash 0 \wedge (b \wedge f) \end{array}$$

a) Beweis des Satzes

$$\vdash a \wedge (0 \wedge f)$$

§ 108 und § 109. Sätze bis (126) . . . . . Seite 137

b) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash^b a \vdash a \wedge (a \wedge \perp f)' \\ \quad \vdash b \wedge (a \wedge f) \\ \quad , \vdash b \wedge (b \wedge \perp f) \end{array}$$

und Schluss des Abschnittes Z.

§ 110 bis § 113. Sätze bis (145) . . . . . Seite 139

H. Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash b \wedge (\wp(b \wedge \perp f) \wedge f)' \\ \quad \vdash \wp(b \wedge \perp f) \end{array}$$

§ 114 bis § 119. Sätze bis (155) . . . . . Seite 144

Θ. Einige Folgesätze.

§ 120 und § 121. Sätze bis (161) . . . . . Seite 149

I. Beweis einiger Sätze von der Anzahl Endlos.

a) Beweis des Satzes

$$\vdash \wp(\infty \wedge \perp f)'$$

§ 122 bis § 125. Definition von  $\infty$ , Sätze bis (167) . . . . . Seite 150

b) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash \infty = \wp \dot{\varepsilon} (\vdash_{\varepsilon} \varepsilon \vee u)' \\ \quad \vdash \infty = \wp u \\ \quad , \vdash \wp(\wp v \wedge \perp f) \end{array}$$

126 § bis § 127. Sätze bis (172) . . . . . Seite 154

c) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash^q a \vdash \dot{\varepsilon}(\varepsilon \wedge u) = a \wedge \wp \perp q' \\ \quad \vdash^b b \wedge u \\ \quad \quad \vdash^c b \wedge (c \wedge q) \\ \quad \quad \quad \vdash^i i \wedge (i \wedge \perp q) \\ \quad \quad \quad \vdash I_q \\ \quad \vdash \infty = \wp u \end{array}$$

§ 128 bis § 143. Sätze bis (207) . . . . . Seite 160

d) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash \infty = \wp u' \\ \quad \vdash^a a \vdash u = a \wedge \wp \perp q \\ \quad \quad \vdash^b b \wedge u \\ \quad \quad \quad \vdash^c b \wedge (c \wedge q) \\ \quad \quad \quad \vdash^i i \wedge (i \wedge \perp q) \\ \quad \quad \quad \vdash I_q \end{array}$$

§ 144 bis § 157. Definitionen der Functionen  $\xi; \zeta, \xi \simeq \zeta, \xi \prec \zeta$ .  
Sätze bis (263) . . . . . Seite 178

*K. Beweis des Satzes*

$$\begin{array}{l} \vdash \overline{u} \wedge (\overline{p}u \wedge \wedge f)' \\ , \overline{u} \wedge q \quad u = \overline{u} \wedge q \end{array}$$

a) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash \overline{p}(x; y \wedge q) = \overline{p}(1; n \wedge f)' \\ \vdash y \wedge (y \wedge \wedge q) \\ \vdash Iq \\ , x; 1 \wedge (y; n \wedge \wedge (q \wedge f)) \end{array}$$

§ 158 bis § 165. Definition der Function  $\xi \wedge \zeta$ . Sätze bis (298) Seite 201

b) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash n = \overline{p}(1; n \wedge f)' \\ , \overline{u} \wedge (n \wedge \wedge f) \end{array}$$

und Schluss des Abschnittes K.

§ 166 bis § 171. Sätze bis (327) . . . . . Seite 217

*A. Beweis des Satzes*

$$\begin{array}{l} \vdash \overline{u} \wedge q \quad \overline{u}(\overline{u} \wedge u) = \overline{u} \wedge q' \\ , \overline{u} \wedge (\overline{p}u \wedge \wedge f) \end{array}$$

§ 172 bis § 179. Sätze bis (348) . . . . . Seite 224

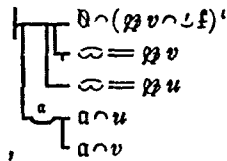
Anhänge.

1. Tafel der Grundgesetze und der aus ihnen zunächst folgenden Sätze . . . . .	Seite 239
2. Tafel der Definitionen . . . . .	" 240
3. Tafel der wichtigeren Lehrsätze . . . . .	" 242
Wörterverzeichnis . . . . .	" 252
Berichtigungen . . . . .	" 254

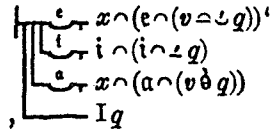
## Inhaltsverzeichnis.

Vorbemerkung . . . . . Seite 1

### M. Beweis des Satzes

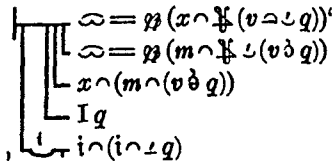


### a) Beweis des Satzes



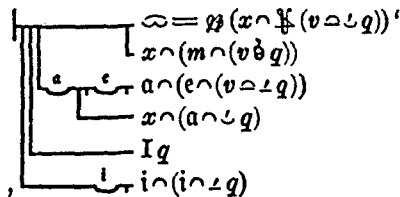
§ 1 bis § 6. Definition der Function  $\xi \delta \zeta$ . Sätze (349) bis (359) Seite 1

### b) Beweis des Satzes



§ 7 bis § 20. Definition der Function  $\xi \delta \zeta$ . Sätze bis (408) . Seite 7

### c) Beweis des Satzes



§ 21 bis § 24. Sätze bis (416) . . . . . Seite 25

d) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash \neg [p(x \wedge \neg(v \supset q)) \wedge \neg f] \\ \quad \vdash x \wedge (m \wedge (v \supset q)) \\ \quad \quad \vdash q \\ \quad \quad \quad \vdash c \wedge (c \wedge \neg q) \\ \quad \quad \quad \vdash c \wedge (c \wedge (v \supset \neg q)) \\ \quad \quad \quad \vdash x \wedge (c \wedge q) \end{array}$$

und Ende des Abschnittes M.

§ 25 bis § 28. Sätze bis (428) . . . . . Seite 30

N. Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash \neg (p v \wedge \neg f) \\ \quad \vdash a \wedge u \\ \quad \vdash a \wedge v \\ \quad \vdash \neg (p u \wedge \neg f) \end{array}$$

§ 29 bis § 32. Sätze bis (443) . . . . . Seite 37

Ξ. Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash p \dot{\varepsilon} (\vdash \varepsilon \wedge z) = p \dot{\varepsilon} (\vdash \varepsilon \wedge u) \\ \quad \vdash p z = p u \\ \quad \vdash p v = p w \\ \quad \vdash a \wedge z \\ \quad \vdash a \wedge v \\ \quad \vdash a \wedge u \\ \quad \vdash a \wedge w \end{array}$$

a) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash p z = p u \\ \quad \vdash z \wedge (u \wedge q) \\ \quad \vdash u \wedge (z \wedge \neg q) \\ \quad \vdash a \wedge (e \wedge q) \\ \quad \vdash a \wedge z \end{array}$$

§ 33 bis § 36. Sätze bis (453) . . . . . Seite 44

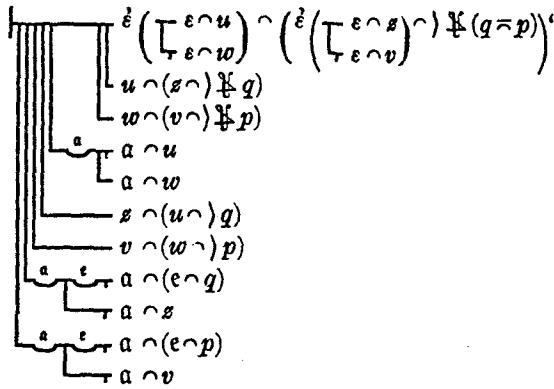
b) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash \dot{\varepsilon} (\vdash \varepsilon \wedge z) \wedge (\dot{\varepsilon} (\vdash \varepsilon \wedge u) \wedge (q \wedge p)) \\ \quad \vdash z \wedge (u \wedge q) \\ \quad \vdash v \wedge (w \wedge p) \\ \quad \vdash a \wedge z \\ \quad \vdash a \wedge v \\ \quad \vdash a \wedge (e \wedge q) \\ \quad \vdash a \wedge z \\ \quad \vdash a \wedge (e \wedge p) \\ \quad \vdash a \wedge v \end{array}$$

§ 37 bis § 40. Definition der Function  $\xi \asymp \zeta$ . Sätze bis (463) . . . . . Seite 48



c) Beweis des Satzes

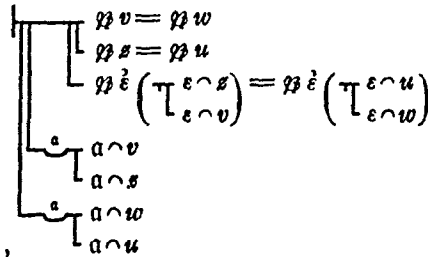


und Schluss des Abschnittes  $\Xi$

§ 41 bis § 44. Sätze bis (469) . . . . . Seite 52

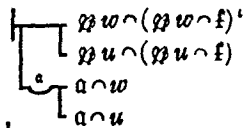
O. Folgesätze.

a) Beweis des Satzes



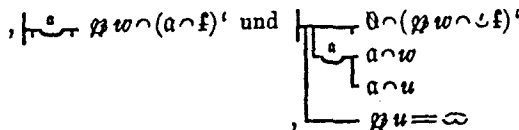
§ 45 und § 46. Sätze bis (472) . . . . . Seite 58

b) Beweis des Satzes



§ 47 bis § 50. Sätze bis (476) . . . . . Seite 61

c) Beweise der Sätze



§ 51 bis § 54. Sätze bis (484) . . . . . Seite 66

### III. Die reellen Zahlen.

#### 1. Kritik der Lehren von den Irrationalzahlen.

##### a) Grundsätze des Definirens.

§ 55. Vorbemerkung . . . . .	Seite 69
1. Grundsatz der Vollständigkeit.	
§ 56. Der Begriff muss scharf begrenzt sein . . . . .	Seite 69
§ 57. Unzulässigkeit des stückweisen Definirens . . . . .	„ 70
§ 58. Entschuldigung des stückweisen Definirens durch die Entwicklung der Wissenschaft . . . . .	„ 70
§ 59. Unhaltbarkeit von Heines Definition der Gleichheit von Zahlzeichen . . . . .	„ 72
§ 60. Vermuthliche Vertheidigung Heines und ihre Widerlegung . . . . .	„ 73
§ 61. Ohne ungültige Definitionen haben wir nicht endgültige Lehrsätze . . . . .	„ 74
§ 62. Für die Beziehungen gilt das Entsprechende. Die Beziehungen des Grösserseins und der Gleichheit . . . . .	„ 74
§ 63. Folgerung für die Functionen erster Stufe mit einem Argumente . . . . .	„ 75
§ 64. Die entsprechende Forderung für die Functionen erster Stufe mit zwei Argumenten . . . . .	„ 75
§ 65. Dasselbe gilt auch von den arithmetischen Zeichen, die Funktionsnamen sind . . . . .	„ 77
2. Grundsatz der Einfachheit des erklärten Ausdrucks.	
§ 66. Erläuterung und Begründung dieses Grundsatzes . . . . .	Seite 79
§ 67. Verstösse gegen beide Grundsätze des Definirens zugleich . . . . .	„ 80

##### b) Cantors Lehre von den Irrationalzahlen.

§ 68. G. Cantor ordnet jeder seiner Fundamentalreihen eine Zahl $b$ zu. Zweifel über den Sinn. Annahme, dass die Zahl $b$ ein Zeichen sei und die Fundamentalreihe bezeichnen solle . . . . .	Seite 80
§ 69. Cantors Erklärungen der Ausdrücke „gleich Null“, „grösser als Null“ und „kleiner als Null“ verstossen gegen unsere beiden Grundsätze des Definirens . . . . .	„ 81
§ 70. Einwand von Illigens gegen Cantors Lehre . . . . .	„ 81
§ 71. Weitere Einwände von Illigens. Bedenken dagegen . . . . .	„ 82
§ 72. Pringsheims Satz, dass die rationalen Zahlen wohl bestimmte Quantitäten vorstellen können, aber nicht müssen . . . . .	„ 83
§ 73. Die reelle Zahl ist ein Grössenverhältnis . . . . .	„ 84
§ 74. Cantors Antwort auf Illigens Einwände vermengt Zeichen und Bezeichnetes. Von den hier erwähnten abstracten Gedankendingen ist in seiner eigenen Erklärung keine Rede . . . . .	„ 85
§ 75. Die quantitative Bestimmung concreter Grössen durch abstracte nach Cantor. Wir haben in dem von Cantor erklärten Ausdrücke nichts der Erklärung Fähiges . . . . .	„ 86
§ 76. Die Cantorschen Zahlgrössen sind überflüssig. Das Hereinziehen der Geometrie giebt uns die Hauptsache, das Verhältnis. Darum ist es entscheidend . . . . .	„ 88
§ 77. Versuch, die Cantorschen Erklärungen so aufzufassen, dass die Zahlgrössen nicht Zeichen, sondern etwa abstracte	

	Gedankendinge seien. Dies misslingt, weil die Zuordnung erst möglich ist, wenn man das Zuzuordnende kennt .	Seite 88
§ 78.	Cantor ordnet in seiner scheinbaren Erklärung des Ausdruckes „gleich Null“ gewissen Fundamentalreihen die Zahl Null zu und giebt in den scheinbaren Erklärungen für „positiv“ und „negativ“ nur Winke für weitere Zuordnungen. Definirt wird dadurch nichts . . . . .	„ 90
§ 79.	Cantors Definitionen von Summe, Differenz und Product sind in mehrfacher Hinsicht fehlerhaft . . . . .	„ 90
§ 80.	Cantors Festsetzung, dass einer Fundamentalreihe, deren Glieder sämmtlich die rationale Zahl $a$ sind, diese Zahl $a$ zugeordnet werde, enthält einen Widerspruch und bringt uns dem Ziele nicht näher . . . . .	„ 91
§ 81.	Cantors Definition des Gleich-, Grösser- und Kleinerseins. Zweifache Auffassung des Gleichheitszeichens. Bei der ersten können wir nicht über die rationalen Zahlen hinaus, bei der zweiten haben wir einen Verstoss gegen unsern ersten Grundsatz des Definirens. Das Schillern zwischen Bekannt- und Unbekanntsein . . . . .	„ 91
§ 82.	Die Definitionen der Summe, des Grösserseins u. s. w. scheinen die Irrationalzahlen schaffen zu sollen, ein Verstoss gegen unsern zweiten Grundsatz . . . . .	„ 92
§ 83.	Die Täuschung verschwindet, wenn man statt der alten, schon erklärten Wörter und Zeichen ganz neue nimmt . . . . .	„ 93
§ 84.	Zusammenfassender Rückblick auf die Ergebnisse der Prüfung der Cantorschen Theorie . . . . .	„ 94
§ 85.	Eine früher von Cantor gegebene Darstellung ist gleichfalls fehlerhaft . . . . .	„ 95
	<i>c) Die Theorien des Irrationalen von E. Heine und J. Thomae.</i>	
§ 86.	Vorläufige Kennzeichnung dieser Theorien . . . . .	Seite 96
§ 87.	Heines grundlegende Aeusserung . . . . .	„ 96
§ 88.	Thomae's grundlegende Aeusserung . . . . .	„ 97
§ 89.	Grund für die Vorziehung der formalen vor der inhaltlichen Arithmetik . . . . .	„ 98
§ 90.	Die formale Arithmetik und die Begriffsschrift als Spiele . . . . .	„ 99
§ 91.	In der formalen Arithmetik drücken Gleichungen und Ungleichungen keine Gedanken aus; auf diesem Standpunkte sind also auch keine Anwendungen möglich . . . . .	„ 100
§ 92.	Die formale Arithmetik entlastet sich auf Kosten der Wissenschaften, in denen Anwendungen gemacht werden . . . . .	„ 101
§ 93.	Im Rechenspiele giebt es weder Lehrsätze, noch Beweise, noch Definitionen, wohl aber in der Theorie dieses Spieles. Die Möglichkeit einer Theorie des Rechen-spieles ist zweifelhaft . . . . .	„ 101
§ 94.	Man braucht von den eigentlichen Zahlen im Rechen-spiele gar nichts . . . . .	„ 102
§ 95.	Thomae's Ausdruck, den Zahlzeichen werde in Bezug auf ihr Verhalten zu den Spielregeln ein Inhalt beigelegt . . . . .	„ 103
§ 96.	Thomae's Ausdrücke, den Schachfiguren werden gewisse Eigenschaften beigelegt und sie seien äussere Zeichen für ihr durch diese Eigenschaften bedingtes Verhalten . . . . .	„ 103

§ 97.	Thomaes Zugeständnisse, dass die Zahlfiguren zuweilen auch als Zahlzeichen gebraucht werden . . . . .	Seite 104
§ 98.	Was sind Zeichen? . . . . .	„ 105
§ 99.	Gleichgestaltete Zeichen sind nicht dasselbe Zeichen . . . . .	„ 106
§ 100.	Anders in der formalen Arithmetik. Hier haben wir Figuren. Gleichgestaltete Figuren. Unterschiede der formalen von der inhaltlichen Arithmetik . . . . .	„ 107
§ 101.	Das Rechnen in der formalen Arithmetik . . . . .	„ 108
§ 102.	Was ist Addiren, Multipliciren, Subtrahiren im Rechenspiele? . . . . .	„ 109
§ 103.	Die <i>Null</i> , die <i>negativen</i> und <i>gebrochenen Zahlen</i> bei Thomae . . . . .	„ 110
§ 104.	Die Rechenoperationen nach Heine . . . . .	„ 110
§ 105.	Die Einführung des Negativen bei Heine . . . . .	„ 112
§ 106.	Die Rechnungsregeln Thomaes . . . . .	„ 113
§ 107.	Sinn der Thomaeschen Formeln als Spielregeln . . . . .	„ 114
§ 108.	Die Spielhandlungen im Rechenspiele. Doppelte Rolle der Gleichungen . . . . .	„ 115
§ 109.	Doppeltes System von Regeln in der formalen Arithmetik. Um dies zu vermeiden, müssen die Regeln in Worten ausgedrückt werden. Ersatz der Formeln durch eine Regel . . . . .	„ 116
§ 110.	Regeln der formalen Arithmetik, Gesetze der inhaltlichen Arithmetik und Sittengesetze . . . . .	„ 117
§ 111.	Unvollständigkeit des Thomaeschen Regelverzeichnisses . . . . .	„ 117
§ 112.	Die formale Subtraction als Umkehrung der formalen Addition . . . . .	„ 118
§ 113.	Die Ausnahmestellung der <i>Null</i> , weist auf eine verbotende Regel hin . . . . .	„ 119
§ 114.	Versuch, diese verbotende Regel auszusprechen . . . . .	„ 120
§ 115.	Unsicherheit bei der Anwendung dieser Regel . . . . .	„ 121
§ 116.	Fernere Unzulänglichkeit des Thomaeschen Regelverzeichnisses und Versuch der Abhülfe . . . . .	„ 122
§ 117.	Thomaes Ausspruch, dass die Division nicht immer widerspruchsfrei vollzogen werden könne . . . . .	„ 122
§ 118.	Thomaes Ausspruch über die Widerspruchsfreiheit der Gebilde . . . . .	„ 123
§ 119.	Lässt die formale Arithmetik eine vollkommen widerspruchsfreie Begründung zu? . . . . .	„ 123
§ 120.	Nicht jede inhaltliche Arithmetik gründet sich auf Sinneswahrnehmung . . . . .	„ 125
§ 121.	Das Ordnen in Reihe und das Grössersein bei Thomae . . . . .	„ 125
§ 122.	Positive und negative, gemeine Zahlfiguren bei Thomae . . . . .	„ 126
§ 123.	Das Unendliche bei Thomae . . . . .	„ 127
§ 124.	Einführung des Irrationalen. Heines Zahlenreihen . . . . .	„ 128
§ 125.	Thomaes Definition der unendlichen Folge . . . . .	„ 129
§ 126.	Thomaes Nullfolgen. Zahlfiguren, die nicht hingeschrieben sind, sind nicht vorhanden . . . . .	„ 130
§ 127.	Können alle Terme einer Folge nicht angeschrieben werden? . . . . .	„ 131
§ 128.	Der Formalarithmetiker wird seinem Plane untreu . . . . .	„ 131
§ 129.	Versuch, Thomaes Meinung besser zu treffen. Hindernisse . . . . .	„ 133

§ 130.	Weder der Umstand, dass ein Satz aus der Vorschrift für die Fortsetzung der Reihe folge, noch dieser Satz selbst, kann zur Definition der Nullvorschrift dienen .	Seite 133
§ 131.	Wegen der Endlichkeit der Menge der Zahlfiguren ist die formale Arithmetik unfähig zur Definition des Irrationalen. Verhüllung dieses Sachverhalts . . . . .	" 134
§ 132.	Die Gruppe $\ast(0\ 0\ 0\ \dots 0\ \dots)\ast$ ist keine Zahlenfolge . .	" 135
§ 133.	Die Gruppe $\ast(a_1\ a_2\ a_3\ \dots a_n\ \dots)\ast$ ist ohne Rücksicht auf ihre Zusammensetzung wie ein einzelner Buchstabe aufzufassen . . . . .	" 135
§ 134.	Der Folge wird ein Zeichen durch das Gleichheitszeichen zugeordnet. Wie ist die entstehende Gleichung aufzufassen? . . . . .	" 136
§ 135.	Die gemeine Zahl als zugeordnetes Zeichen. Vieldeutigkeit .	" 137
§ 136.	Scheitern der formalen Arithmetik . . . . .	" 138
§ 137.	Rückblick auf die formale Arithmetik . . . . .	" 138

*d) Das Schaffen neuer Gegenstände nach R. Dedekind, H. Hankel, O. Stolz.*

§ 138.	Die drei Hauptvorteile der Dedekindschen Lehre. Schroffer Gegensatz zur formalen Arithmetik . . . . .	Seite 140
§ 139.	Der Schnitt. Das Schaffen einer Irrationalzahl. Ist es möglich? Die Schaffensmacht ist beschränkt . . . . .	" 141
§ 140.	Ein schrankenloses Schaffen wäre zu bequem, als dass es erlaubt sein könnte . . . . .	" 141
§ 141.	Die alternirenden Zahlen nach H. Hankel. Die mit diesen geführten Beweise sind hinfällig. Ihre Eigenschaften bleiben dunkel. Durch die Festsetzungen wird nicht einmal eine Klasse bestimmt, der die alternirenden Einheiten angehören, viel weniger sie selbst . . . . .	" 142
§ 142.	Eine grössere Formstrenge des Beweises würde den Fehler offenbaren. Beweise, die mit der imaginären Einheit geführt werden, sind oft ebenso mangelhaft . .	" 144
§ 143.	Schöpferische Definitionen von O. Stolz. Folgeschwere Einschränkung der Schöpfermacht . . . . .	" 144
§ 144.	Aus dem Nichtoffenbarsein eines Widerspruchs kann nicht auf dessen Nichtbestehen geschlossen werden . .	" 145
§ 145.	Ist Stolzens Theorie formal im Sinne von Thomae? Grosser Unterschied der Ansichten von Stolz und Thomae. Dedekind. G. Cantor . . . . .	" 146
§ 146.	Unsere Einführung der Werthverläufe ist verschieden von dem Zahlenschaffen der Mathematiker . . . . .	" 147
§ 147.	Unser Verfahren ist eigentlich nicht neu, wird mit vollem Bewusstsein seiner logischen Zulässigkeit ausgeübt. Ohne es wäre eine wissenschaftliche Begründung der Mathematik unmöglich . . . . .	" 148

*e) Weierstrassens Lehre.*

§ 148.	Schwierigkeiten, die der genauen Erfassung und Beurtheilung dieser Lehre entgegenstehen . . . . .	Seite 149
§ 149.	Der Pfeffernussstandpunkt hinsichtlich der Anzahlen .	" 149
§ 150.	Die beiden Fehler der Weierstrassischen Lehre von den Anzahlen, Einschmuggelung der eigentlichen Zahl .	" 150

§ 151.	Kampf der Weierstrassischen Lehre gegen die Natur der Sache. Singular und Plural beim Worte „Einheit“. Eigennamen oder Begriffswort? Ist das Gleichheitszeichen Identitätszeichen? Der Werth eines Aggregates . . .	Seite 151
§ 152.	Verschiedene Bedeutungen des Pluszeichens. Das Wunder der wiederholt vorkommenden Gegenstände . . .	„ 151
§ 153.	Die Zahl als Aggregat abstracter Einheiten oder der wiederholt vorkommenden Eins. Die drei Auffassungen der Zahl bei Weierstrass . . .	„ 152
§ 154.	Die höhern Zahlen bei Weierstrass. Sinnlose Gleichung, sinnloser Satz. Die Erklärungen reichen nicht hin oder fehlen ganz . . .	„ 153
§ 155.	Die Anerkennung der höhern Zahlen beruht nach Kossak auf ihrer Definition. Ein Schaffen, dessen Berechtigung zweifelhaft bleibt . . .	„ 153

*f) Rückblick und Ausschau.*

§ 156.	Formale und inhaltliche Arithmetik. Beide Wege haben bisher nicht zum Ziele geführt . . .	Seite 154
§ 157.	Die reellen Zahlen als Grössenverhältnisse. Das Gebiet der Anzahlen kann nicht zu dem der reellen Zahlen erweitert werden . . .	„ 155
§ 158.	Die Zahlzeichen bedeuten nicht Strecken. Loslösung von der Geometrie. Logische Natur der Arithmetik. „Formal“ in anderm Sinne . . .	„ 156
§ 159.	Mittelweg zwischen der geometrischen Begründungsweise und den in neuerer Zeit versuchten Wegen. Ablösung von jeder besondern Grössenart, ohne das Messen zu vernachlässigen. Handhaben für die Anwendung. Bedenken . . .	„ 156

*g) Grösse.*

§ 160.	Misslungene Versuche, das Wort „Grösse“ zu erklären	Seite 157
§ 161.	Grund der Misserfolge ist eine falsche Fragestellung. Klasse. Welche Eigenschaften muss eine Klasse haben, um ein Grössengebiet zu sein? . . .	„ 158
§ 162.	Bemerkung von Gauss. Relation. Das Grössengebiet als eine Klasse von Relationen . . .	„ 159
§ 163.	Beispiel: Abstandsrelationen . . .	„ 160
§ 164.	Vorläufige Entkräftung unseres Bedenkens im § 159 . . .	„ 160

2. Grössenlehre.

*A. Sätze über die Zusammensetzung von Relationen im Allgemeinen.*

§ 165.	Das associative Princip ist für alle Zusammensetzungen von Relationen zu beweisen . . .	Seite 163
§ 166.	Beweis des associativen Principa. Sätze von (485) bis (491) . . .	„ 163
§ 167 bis § 170.	Das commutative Princip in gewissen Reihen. Definition der Function * §. Sätze bis (502) . . .	„ 166
	Sätze, in denen die Aehnlichkeit der Umkehrung der	

Relationen mit der Umkehrung des Vorzeichens hervortritt.

§ 171 und 172. Sätze bis (508) . . . . . Seite 168

*B. Die Positivalklasse.*

a) Definitionen der Functionen  $\partial\xi$  und  $\mathfrak{f}\xi$  und Folgerungen.

§ 173 und § 174. Definition der Function  $\partial\xi$  und Folgerungen.

Sätze bis (517) . . . . . Seite 168

§ 175 und § 176. Positivalklasse. Definition der Function  $\mathfrak{f}\xi$  und Folgerungen. Sätze bis (544) . . . . . „ 170

b) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash q \neg \mathfrak{f} q = \mathfrak{f} p \neg p' \\ \vdash p \wedge s \\ \vdash q \wedge s \\ , \vdash \mathfrak{f} s \end{array}$$

§ 177 und § 178. Sätze bis (559) . . . . . Seite 176

c) Beweis des Satzes

$$\begin{array}{l} \vdash p = r \neg \mathfrak{f} r' \\ \vdash p \wedge s \\ \vdash r \wedge s \\ \vdash \mathfrak{f} s \\ \vdash \mathfrak{f} p \wedge s \\ , \vdash p \wedge \partial s \end{array}$$

§ 179 und § 180. Sätze bis (561) . . . . . Seite 180

d) Beweise der Sätze

$$\begin{array}{l} \vdash q \neg (p \neg \mathfrak{f} p) = q' \\ \vdash p \wedge s \\ \vdash \mathfrak{f} s \\ , \vdash q \wedge s \end{array} \quad \begin{array}{l} \vdash p \neg \mathfrak{f} p \neg q = q' \\ \vdash q \wedge s \\ \vdash \mathfrak{f} s \\ , \vdash p \wedge s \end{array}$$

und Folgerungen.

§ 181 bis § 186. Sätze bis (585) . . . . . Seite 181

e) Sätze über das Grössere und Kleinere in einer Positivalklasse.

§ 187 bis § 192. Sätze bis (589) . . . . . Seite 185

*Γ. Die Grenze.*

Definitionen der Functionen  $\xi_A \zeta$  und  $\xi_1 \zeta$ .

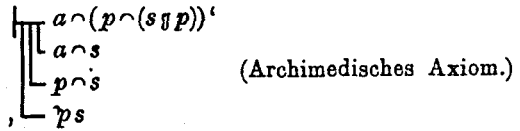
§ 193 bis § 196. Es giebt nur eine  $s$ -Grenze von  $u$ . Sätze bis (602) . . . . . Seite 187

*Δ. Die Positivklasse.*

a) Definition der Function  $\mathfrak{p}\xi$  und Folgerungen.

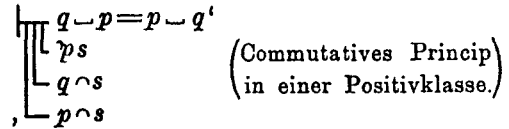
§ 197 und § 198. (Sätze bis (607) . . . . . Seite 189

b) Beweis des Satzes

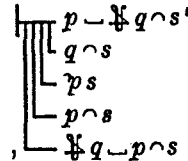


§ 199 bis § 214. Definitionen der Function  $\xi \eta \zeta$ . Sätze bis (636) . . . . . Seite 191

E. Beweis des Satzes

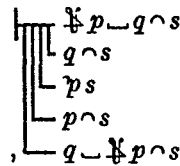


a) Beweis des Satzes



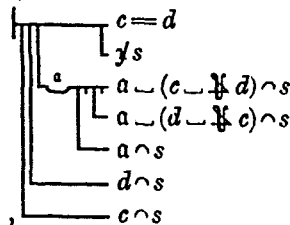
§ 215 und § 216. Sätze bis (638) . . . . . Seite 204

b) Beweis des Satzes



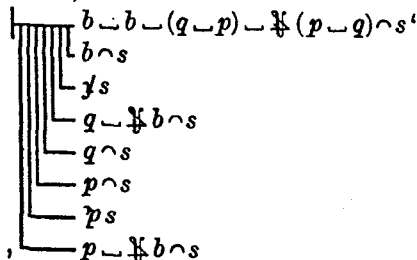
§ 217 und § 218. Sätze bis (641) . . . . . Seite 207

c) Beweis des Satzes



§ 219 und § 220. Sätze bis (644) . . . . . Seite 209

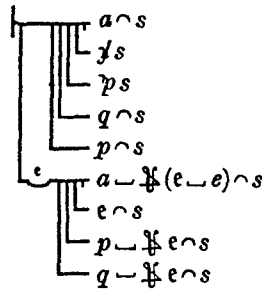
d) Beweis des Satzes



§ 221 bis § 230. Sätze bis (666) . . . . . Seite 211



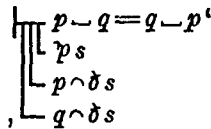
e) Beweis des Satzes



und Ende des Abschnittes E.

§ 231 bis § 238. Sätze bis (678) . . . . . Seite 230

Z. Beweis des Satzes



§ 239 bis § 244. Sätze bis (689) . . . . . Seite 239  
 § 245. Die nächste Aufgabe . . . . . „ 243

Anhänge.

1. Tafel der Definitionen . . . . . Seite 244  
 2. Tafel der wichtigeren Lehrsätze . . . . . „ 245  
 Nachwort . . . . . „ 253  
 Wörterverzeichnis . . . . . „ 266