

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlegende Eigenschaften von Fibonacci- und Lucasfolge	1
1.1	Einführung und Definitionen	1
1.2	Einfache Summenformeln	3
1.3	Weitere Eigenschaften von Fibonacci- und Lucasfolge	8
1.3.1	Das Prinzip der vollständigen Induktion	8
1.3.2	Beziehungen zwischen Fibonaccizahlen	9
1.3.3	Beziehungen zwischen Lucaszahlen	13
1.4	Lineare Rekursion und die Formel von Binet	15
1.4.1	Die Formel von Binet	15
1.4.2	Lineare Rekursion – die Herleitung der Formel von Binet	18
1.5	Folgerungen aus der Formel von Binet	20
1.5.1	Folgerungen für die Fibonaccifolge	21
1.5.2	Beziehungen zwischen Fibonacci- und Lucaszahlen	26
1.6	Fibonacci- und Lucaszahlen mit negativen Indizes	28
1.7	Aufgaben	30
2	Fibonaccizahlen und Lineare Algebra	31
2.1	Die Herleitung der Formel von Binet mithilfe der Eigenwertrechnung	31
2.2	Die Darstellung der Fibonaccizahlen als Determinanten von Matrizen	35
2.3	Herleitung von Fibonacci-Identitäten mithilfe der Matrizenrechnung	38
2.4	Fibonacci- und Lucasvektoren	41
2.5	Aufgaben	48
2.5.1	Übungsaufgaben	48
2.5.2	Arbeitsaufträge	48
3	Zahlentheoretische Eigenschaften von Fibonacci- und Lucasfolge	49
3.1	Zahlentheoretische Grundlagen	49
3.1.1	Teiler und Vielfache	49
3.1.2	Der euklidische Algorithmus und Eigenschaften von ggT und kgV	51
3.1.3	Binomialkoeffizienten	54
3.1.4	Gruppen, Ringe, Körper	56
3.1.5	Kongruenzen und Restklassen	59

3.2	Teilbarkeitsaussagen	64
3.2.1	Teilbarkeitsaussagen für Fibonaccizahlen	64
3.2.2	Quotienten von Fibonaccizahlen	70
3.2.3	Teilbarkeitsaussagen für Lucaszahlen	74
3.3	Die Fibonaccifolge modulo m	78
3.3.1	Die Periodenlänge der Fibonaccifolge modulo m	78
3.3.2	Die Fibonaccifolge modulo p , p prim	82
3.3.3	Die Verteilung der Fibonaccizahlen modulo m	89
3.3.4	Summenformeln modulo m	90
3.4	Fibonaccizahlen und Binomialkoeffizienten	91
3.4.1	Summenformeln mit Binomialkoeffizienten	92
3.4.2	Verallgemeinerte Binomialkoeffizienten	95
3.5	Quadratzahlen in der Fibonacci- und der Lucasfolge	97
3.6	Aufgaben	100
3.6.1	Übungsaufgaben	100
3.6.2	Arbeitsaufträge	101
4	Fibonaccizahlen in der Analysis	103
4.1	Einige spezielle Folgen	103
4.1.1	Folgen mit dem Grenzwert Φ	105
4.1.2	Reihen mit Fibonaccizahlen	108
4.2	Potenzreihen mit Fibonaccizahlen	112
4.3	Aufgaben	115
5	Fibonaccizahlen in der Geometrie	117
5.1	Rechtwinklige Dreiecke	117
5.2	Der goldene Schnitt	119
5.2.1	Teilung einer Strecke	119
5.2.2	Konstruktionsverfahren für den goldenen Schnitt	121
5.3	Goldene Dreiecke	125
5.3.1	Die Winkel im goldenen Dreieck	125
5.3.2	Das regelmäßige Zehneck	127
5.3.3	Das regelmäßige Fünfeck	128
5.4	Fibonaccispirale und goldene Spirale	133
5.5	Aufgaben	137
5.5.1	Übungsaufgaben	137
5.5.2	Arbeitsaufträge	138
6	Das Fibonaccizahlensystem und Nim-Spiele	139
6.1	Die Darstellung natürlicher Zahlen durch Fibonaccizahlen	139

6.1.1	Stellenwertsysteme	139
6.1.2	Der Satz von Zeckendorf	142
6.2	Nim-Spiele	146
6.2.1	Das Spiel „Euklid“	146
6.2.2	Das Spiel von Wythoff	148
6.2.3	Das Spiel von Wythoff und das Fibonaccizahlensystem	152
6.3	Aufgaben	155
6.3.1	Übungsaufgaben	155
6.3.2	Arbeitsaufträge	156
7	Die Fibonaccizahlen in der Informatik	157
7.1	Binäre Suchbäume	157
7.2	Fibonacci-Heaps	160
7.3	Aufgaben	162
7.3.1	Übungsaufgaben	162
7.3.2	Arbeitsaufträge	162
8	Verallgemeinerungen der Fibonaccizahlen	163
8.1	Lucasfolgen	163
8.1.1	Einführung und Definitionen	163
8.1.2	Eigenschaften von Lucasfolgen	166
8.2	Die Padovanfolge	170
8.2.1	Definition und Eigenschaften	170
8.2.2	Rekursions- und Summenformeln	171
8.2.3	Kombinatorische Deutung der Padovanzahlen	174
8.2.4	Padovan- und Perrinfolge	174
8.2.5	Die Plastikzahl	176
8.2.6	Die Padovanspirale	177
8.3	Die Tribonaccifolge	178
8.4	Fibonacci- und Lucaspolynome	180
8.5	Aufgaben	183
8.5.1	Übungsaufgaben	183
8.5.2	Arbeitsaufträge	184
A	Tabellen der Zahlenfolgen	185
A.1	Die ersten 60 Fibonaccizahlen	185
A.2	Die ersten 60 Lucaszahlen	186
A.3	Die ersten 60 Padovanzahlen	187
A.4	Die ersten 60 Perrin zahlen	188

B	Die Formeln von Cardano	189
	Literaturverzeichnis	191
	Index	195